Lecţii de geometrie diferenţială a curbelor şi a suprafeţelor

Paul A. Blaga

Cuprins

Partea I

Curbe

Curbe în spaţiu | 1

1.1 Introducere

Intuitiv, curbele nu sunt altceva decât deformări ale unor drepte. Pot fi gândite, prin urmare, ca fiind obiecte "unidimensionale". Suntem familiarizaţi, deja, cu unele dintre ele din matematica elementară, deoarece, desigur, graficele de funcţii pot fi considerate ca fiind curbe, din acest punct de vedere. Pe de altă parte, de regulă, curbele *nu sunt* grafice (cel puţin, nu global). Este suficient să ne gândim la o eliosă sau, în particular, la un cerc. Astfel, în general, nu putem reprezenta o curbă printr-o ecuaţie de forma $y = f(x)$, cum s-ar întâmpla în cazul unui grafic. Pe de altă parte, o conică se poate reprezenta printr-o ecuaţie implicită de forma $f(x, y) = 0$, unde, în acest caz particular, dupăc um se ştie, f este o funcţie polinomială de gradul al doilea în x şi y. În fine, putem reprezenta coordonatele fiecărui punct de pe o curbă ca funcţii de un parametru real. După cum vom vedea, aceasta este, de obicei, cea mai convenabilă modalitate de a reprezenta, local, o curbă.

O problemă importantă pe care trebuie să o avem în vedere este cea a gradului de netezime a funcţiilor pe care le utilizăm pentru a descrie o curbă. Desigur, înainte de toate suntem interesaţi să utilizăm tehnicile de calcul diferenţial. Vom presupune, de aceea, că toate funcţiile implicate sunt cel puţin o dată continuu diferenţiabile şi că, de fiecare dată când intervin derivate de ordin superior, acestea există şi sunt continue. Vom folosi pentru funcţiile care verifică aceste condiţii termenul generic de funcţii "netede". Pe lângă aspectele computaţionale, mai există şi alte motive, mai profunde, pentru care presupunem că funcţiile sunt cel puţin o dată continuu diferenţiabile. Să presupunem, de exemplu, că o curbă plană este descrisă printr-un sistem de ecuaţii de forma

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t) \end{cases}.$$

Se poate demonstra că dacă funcţiile f şi g sunt doar continue, curba poate să umple un întreg pătrat (sau chiar întregul plan). Primul exemplu de astfel de curbă anomală (care, evident, contrazice imaginea pe care ne-o facem despre o curbă, ca obiect unidimensional) a fost construit de către matematicianul italian Giuseppe Peano, la sfârşitul secolului al XIX-lea. În plus, acest fenomen nu dispare nici măcar dacă funcţiile f şi g sunt diferenţiabile, dar nu *continuu* diferenţiabile. În figura 1.1 indicăm un proces iterativ care defineşte o curbă Peano care umple un pătrat. Curba însăşi este limita curbelor obţinute prin acest proces iterative. Este posibil, de fapt, să descriem analitic această curbă (adică putem găsi o expresie pentru fiecare iteraţie), dar, cum aceste "curbe" nu constituie subiectul investigaţiilor noastre, preferăm să-l lăsăm pe cititor să-şi satisfacă singur curiozitatea.

Trebuie să spunem, totuşi, că funcţiile pe care le folosim pentru a descrie o curbă nu trebuie să fie neapărat continuu diferenţiabile pentru a evita anomaliile menţionate mai sus. Ceea ce trebuie este ceva mai puţin, mai precis ca funcţiile să fie *cu variaţie mărginită*. Este un fapt bine cunoscut că funcţiile continuu diferenţiabile verifică această condiţie şi, aşa cum am spus deja, ele ne oferă tehnicile computaţionale necesare, care nu sunt disponibile pentru o funcţie cu variaţie mărginită oarecare.

1.2 Curbe parametrizate (drumuri)

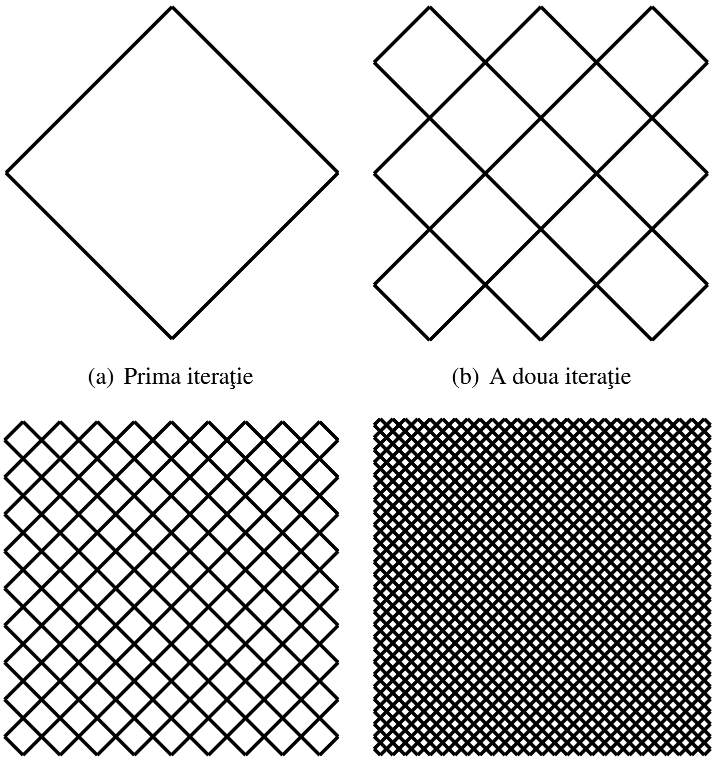
Fie I un interval pe axa reală $\mathbb{R}$. Nu vom presupune întotdeauna că intervalul este deschis. Uneori este chiar important ca intervalul să fie închis. În particular, el poate fi nemărginit şi poate coincide întreaga axă reală.

Definiţia 1.2.1. O *curbă parametrizată* (sau *drum*) de clasă C^k $(k > 0)$ în spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$ este o aplicaţie C^k

$$\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3 : t \to (x(t), y(t), z(t)). \tag{1.2.1}$$

O curbă parametrizată se notează, de regulă, cu $(I, \mathbf{r})$, $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ sau, când intervalul este subînţeles, doar cu $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Remarcăm că un drum este de clasă C^k funcţiile (cu valori reale) x, y, z sunt C^k. Dacă intervalul nu este deschis, vom presupune, înainte de toate, că funcţiile cu care lucrăm sunt de clasă C^k în interiorul intervalului şi toate derivatele lor până la ordinul k au limite laterale finite la capetele intervalului, dacă aceste capete aparţin intervalului.

Un drum se numeşte *compact, semi-deschis* sau *deschis* dacă intervalul de definiţie I este, respectiv, compact, semi-deschis sau deschis.



(a) Prima iteraţie (b) A doua iteraţie

(c) A treia iteraţie (d) A patra iteraţie

Figura 1.1 – Curba lui Peano (primele patru iteraţii)

Dacă intervalul I este mărginit inferior, superior sau în ambele părţi, atunci imaginea oricărei extremităţi a lui I se numeşte *capăt* al drumului. Dacă, în particular, curba este compactă, iar cele două capete coincid, drumul se numeşte *închis*. O denumire alternativă ce se utilizează pentru o curbă închisă este cea de *buclă*.

Ocazional (de exemplu, în teoria integralelor curbilinii) poate fi necesar să considerăm drumuri care sunt de clasă C^k în toate punctele intervalului I, cu excepţia unui număr finit de puncte. Următoarea definiţie este mai precisă.

Definiţia 1.2.2. Vom spune că o curbă parametrizată $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ este C^k *pe porţiuni* dacă există o subdiviziune finită ($a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b$) of the interval $[a, b]$ astfel încât restricţia lui $\mathbf{r}$ la fiecare interval compact $[a_{i-1}, a_i]$ să fie de clasă

C^k, unde $i \in \{1, \dots, n\}$.

Observaţie. Nu este dificil să arătăm că o curbă parametrizată $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ este C^k pe porţiuni dacă şi numai dacă următoarele condiţii sunt îndeplinite simultan:

(i) Mulţimea

$$S = \left\{ t \in [a, b] \mid f^{(k)} \text{ nu există} \right\}$$

este finită.

(ii) $f^{(k)}$ este continuă pe $[a, b] \setminus S$.

(iii) $f^{(k)}$ are limite laterale la stânga şi la dreapta finite în fiecare punct al lui S.

De acum înainte, vom presupune tot timpul că ordinul de netezime k este suficient de înalt şi nu-l vom mai menţiona (cu câteva excepţii). Vom folosi, în schimb, termenul generic de *curbă parametrizată netedă*, însemnând de clasă cel puţin C^1 şi, de fiecare dată când apar derivate de ordinul k – cel puţin C^k.

Imaginea $\mathbf{r}(I) \subset \mathbb{R}^3$ a intervalului I prin aplicaţia (1.2.1) se numeşte *suportul* drumului $(I, \mathbf{r})$.

Dacă $\mathbf{r}(t_0) = a$, vom spune că curba parametrizată *trece* prin punctul a pentru $t = t_0$. Uneori, pentru o exprimare mai scurtă, ne vom referi la acest punct ca fiind *punctul* t_0 al curbei parametrizate.

Exemple

1. Fie $\mathbf{r_0} \in \mathbb{R}^3$ un punct oarecare şi $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ – un vector, $\mathbf{a} \neq 0$, iar $I = \mathbb{R}$. Curba parametrizată $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \to \mathbf{r_0} + t\mathbf{a}$ se numeşte *dreaptă*. Suportul său este dreapta care trece prin $\mathbf{r_0}$ (pentru $t = 0$) şi are direcţia dată de vectorul $\mathbf{a}$.

2. $I = \mathbb{R}$, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r_0} + t^3\mathbf{a}$. Suportul acestui drum este aceeaşi dreaptă.

3. $I = \mathbb{R}$, $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Suportul acestei curbe parametrizate se numeşte *elice cilindrică circulară* (vezi figura **??**).

4. $I = [0, 2\pi]$, $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$. Suportul drumului este cercul unitate, situat în planul xOy, cu centrul în originea coordonatelor.

5. $I = [0, 2\pi]$, $\mathbf{r}(t) = (\cos 2t, \sin 2t, 0)$. Suportul curbei este acelaşi cu cel din exemplul precedent.

6. $I = \mathbb{R}$, $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3, 0)$. Această curbă are un punct de întoarcere pentru $t = 0$.

Definiţia 1.2.3. O curbă parametrizată (1.2.1) se numeşte *regulară pentru* $t = t_0$ dacă $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$ şi *regulară* dacă este regulară pentru fiecare $t \in I$.

După cum vom vedea ceva mai târziu, noţiunea de regularitate într-un punct a unei funcţii este legată de existenţa unei tangente bine definită la curbă în acel punct.

Curbele din exemplul precedent are regulare, cu excepţia celor de la punctele 2 şi 6, care nu sunt regulare pentru $t = 0$.

Observaţie. Faptul că *acelaşi* suport poate corespunde atât unei curbe regulare, cât şi unei curbe neregulare sugerează faptul că absenţa regularităţii într-un punct nu înseamnă neapărat că punctul corespunzător al suportului are vreo particularitate geometrică. Atâta doar că regularitatea *garantează* absenţa acestor particularităţi. Într-adevăr, dacă examinăm, din nou, curbele 2 şi 6 din exemplul precedent, remarcăm imediat că, deşi sunt ambele neregulare pentru $t = 0$, doare pentru a doua curbă această singularitate analitică implică o singularitate geometrică (un punct de întoarcere), în timp ce pentru prima curbă suportul este o dreaptă, fără nici un fel de puncte speciale.

Fiecărui drum îi corespunde o submulţime a lui $\mathbb{R}^3$, suportul său. Totuşi, aşa cum demonstrează exemnplele 1 şi 2, curbe parametrizate diferite pot avea acelaşi suport. O curbă parametrizată poate fi gândită ca o submulţime a lui $\mathbb{R}^3$, împreună cu o parametrizare.[1] Suportul unei curbe parametrizate corespunde imaginii noastre intuitive a curbei, ca obiect geometric unidimensional. După cum vom vedea mai târziu, suportul unei curbe parametrizate poate avea autointersecţii sau puncte de întoarcere care, din multe motive, nu sunt de dorit în aplicaţii. Condiţiile de regularitate elimină punctele de întoarcere, dar nu şi autointersecţiilor. Pentru a le elimina pe acestea din urmă, trebuie să impunem nişte condiţii suplimentare.

După cum am văzut, curbe parametrizate diferite pot avea acelaşi suport. În final, suportul, ca mulţime de puncte este cel care ne interesează. Este necesar, de aceea, să identificăm legătura dintre curbele parametrizate care definesc acelaşi suport. Pentru motive care vor fi lămurite mai târziu, pe moment, cel puţin pe moment, suntem interesaţi doar de curbe regulare. De aceea, de exemplu, trecerea de la o reprezentare parametrică la alta nu trebuie să schimbe regularitatea curbei.

Definiţia 1.2.4. Fie $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$, $(J, \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(s))$ două curbe parametrizate. Un difeomorfism $\lambda : I \to J : t \to s = \lambda(t)$ astfel încât $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} \circ \lambda$, adică $\mathbf{r}(t) \equiv \boldsymbol{\rho}(\lambda(t))$,

[1] Desigur, informaţia este redundantă, deoarece reprezentarea parametrică determină suportul.

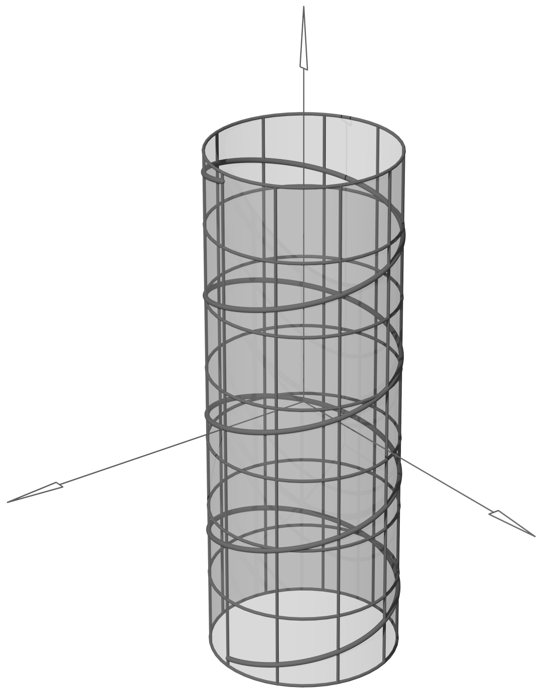


Figura 1.2 – Elicea circulară

se numeşte *schimbare de parametru* sau *reparametrizare*. Două curbe parametrizate pentru care există o schimbare de parametru se numesc *echivalente*, în timp ce punctele t şi $s = \lambda(t)$ se numesc *corespondente*.

Observaţii. 1. Relaţia definită mai sus este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea tuturor curbelor parametrizate.

2. Reparametrizarea are o interpretare cinematică simplă. Dacă interpretăm ecuaţiile parametrice ale unui drum ca fiind ecuaţiile de mişcare ale unei particule, atunci suportul curbei este traiectoria particulei, în timp ce vectorul $\mathbf{r}'(t)$ este viteza particulei. Efectul unei reparametrizări este modificarea (ca modul) a vitezei cu care este traversată traiectoria. De asemenea, dacă $\lambda'(t) < 0$, atunci traiectoria este traversată în sens invers, după reparametrizare. Este de remarcat că cei doi vectori viteză a două curbe parametrizate echivalente în puncte

corespondente au aceeaşi direcţie. Ei pot avea module diferite şi sensuri diferite.

Exemplu. Curbele parametrizate din exemplele 1 şi 2 nu sunt echivalente, deşi, după cum am menţionat, ele au acelaşi suport.

Observaţie. Uneori, clasele de echivalenţă determinate de de relaţia definită mai sus între curbele parametrizate se numes *curbe*. Nu vom utiliza această abordare aici, deoarece vrem ca curbele să fie nişte obiecte mai generale decât suporturile de curbe parametrizate. În particular, după cum vom vedea imediat, de obicei curbele nu pot fi reprezentate global prin acelaşi set de ecuaţii parametrice. E suficient să ne gândim la cercul unitate, cu centrul în origine. Una dintre cele mai utilizate reprezentări parametrice ale cercului este

$$\begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = \sin\theta \end{cases}.$$

Acum, dacă lăsăm parametrul să varieze doar în intervalul $(0, 2\pi)$, atunci unul dintre punctele cercului nu este reprezentat. Desigur, putem extinde uintervalul, dar atunci acelaşi punct corespunde mai multor valori ale parametrului, ceea ce, din nou, nu este acceptabil.

Printre toate curbele parametrizate echivalente cu o curbă parametrizată dată, există una care are o valoare teoretică deosebită şi care simplifică multe demonstraţii în teoria curbelor, deşi, în majoritatea cazurilor, este foarte greu să o găsim analitic şi, prin urmare, valoarea ei practică este limitată.

Definiţia 1.2.5. Vom spune că o curbă parametrizată este *parametrizată natural* dacă $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$ pentru orice $s \in I$. De regulă, parametrul natural este notat cu s.

Observaţie. Se poate observa imediat că orice curbă netedă parametrizată natural $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(s))$ este *regulară*, deoarece, în mod clar, $\mathbf{r}'(s)$ nu se poate anula nicăieri, din moment ce norma sa nu se anulează.

Nu este, câtuşi de puţin, evident că pentru orice curbă parametrizată netedă (şi regulară!), existA alta, echivalentă cu ea, care este parametrizată natural. Pentru a construi o astfel de curbă, avem nevoie, mai întâi, de altă noţiune.

Lungimea arcului unui drum $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ între punctele t_1 şi t_2 este numărul real[2]

$$l_{t_1,t_2} = \left| \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{r}'(t)\| dt \right|.$$

[2]Deşi integrandul este pozitiv, nu am presupus că $t_1 < t_2$, de aceea integrala poate fi negativă, iar modulul este necesar, dacă vrem să obţinem o cantitate pozitivă.

Observaţie. Există o motivaţie serioasă pentru definirea lungimii arcului în acest mod. Să presupunem, pentru fixarea ideilor, că $t_1 < t_2$. Alegem o diviziune arbitrară $t_1 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = t_2$ a segmentului $[t_1, t_2]$ şi examinăm linia poligonală $\gamma_n = \mathbf{r}(a_0)\mathbf{r}(a_1)\cdots\mathbf{r}(a_n)$. Lungimea acestei linii poligonale este suma lungimilor segmentelor sale. Se poate arăta că, dacă curba parametrizată $(I, \mathbf{r})$ este "suficient de bună" (de exemplu, cel puţin o dată continuu diferenţiabilă), atunci limita lungimii liniei poligonale γ_n, când norma diviziunii tinde către zero, există şi este egală cu lungimea arcului de drum. Trebuie menţionat, de asemenea, că definiţia lungimii arcului are sens şi pentru curbe netede pe porţiuni, deoarece, în acest caz, vectorul tangent are doar un număr finit de puncte de discontinuitate şi, de aceea, norma sa este integrabilă.

Vom demonstra că lungimile arcelor a două curbe parametrizate echivalente între puncte corespondente sunt egale, de aceea, lungimea arcului este, într-un fel, o caracteristică a suportului[3].

Într-adevăr, fie $\mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\rho}(\lambda(t))$, atunci $\mathbf{r}'(t) = \lambda'(t)\boldsymbol{\rho}'(\lambda(t))$. De aceea,

$$\begin{aligned}\left|\int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{r}'(t)\| dt\right| &= \left|\int_{t_1}^{t_2} \|\boldsymbol{\rho}'(\lambda(t))\| \cdot |\lambda'| dt\right| = \\ &= \left|\int_{t_1}^{t_2} \|\boldsymbol{\rho}'(\lambda)\| \underbrace{\lambda'(t)dt}_{d\lambda}\right| = \left|\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \|\boldsymbol{\rho}'(\lambda)\| d\lambda\right|.\end{aligned}$$

Pentru curbe parametrizate natural, $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(s))$,

$$l_{s_1,s_2} = |s_2 - s_1|.$$

În particular, dacă $0 \in I$ (ceea ce se poate presupune întotdeauna, deoarece translaţia este un difeomorfism), atunci $l_{0,s} = |s|$, adică, abstracţie făcând de semn, parametrul natural este lungimea arcului.

Propoziţia 1. *Pentru orice curbă parametrizată regulară există o curbă parametrizată natural echivalentă cu ea.*

[3] Spunem "într-un fel", pentru că putem reprezenta aceeaşi mulţime de puncte ca suport al altei curbe parametrizate, care să nu fie echivalentă cu cea iniţială. Noul drum poate, foarte bine, să aibă o lungimea a arcului diferită între aceleaşi puncte ale suportului.

Demonstraţie. Fie $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ o curbă parametrizată regulară, $t_0 \in I$, şi

$$\lambda : I \to \mathbb{R}, \quad t \to \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{r}'(\tau)\| d\tau.$$

Funcţia λ este netedă şi strict crescătoare, deoarece $\lambda'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| > 0$. Prin urmare, imaginea sa va fi un interval deschis J, iar funcţia $\lambda : I \to J$ va fi un difeomorfism. Curba parametrizată $(J, \boldsymbol{\rho}(s) = \mathbf{r}(\lambda^{-1}(s))$ este echivalentă cu $(I, \mathbf{r})$ şi este parametrizată natural, deoarece $\boldsymbol{\rho}'(s) = \mathbf{r}'(\lambda^{-1}(s))(\lambda^{-1})'(s)$, în timp ce

$$(\lambda^{-1})'(s) = \frac{1}{\lambda'(\lambda^{-1}(s))} = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(\lambda^{-1}(s))\|}$$

şi, prin urmare,

$$\|\boldsymbol{\rho}'(s)\| = \|\mathbf{r}'(\lambda^{-1}(s))\| \cdot |(\lambda^{-1})'(s)| = 1.$$

□

Observaţie. În demonstraţia propoziţiei precedente, am utilizat, în mod esenţial, faptul că toate punctele curbei sunt regulare. Pe un interval în care curba are puncte singulare, nu există o curbă parametrizată natural echivalentă cu ea.

Exemplu. Pentru elicea circulară

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt, \end{cases}$$

obţinem, printr-o schimbare de parametru,

$$s(t) = \int_0^t \|\mathbf{r}'(\tau)\| d\tau = \int_0^t \|\{-a \sin\tau, a\cos\tau, b\}\| d\tau = \sqrt{a^2 + b^2},$$

de aceea,

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Aşadar, parametrizarea naturală a elicei este dată de ecuaţiile

$$\begin{cases} x = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y = a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ z = b \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

Exerciţiul 1.2.1. Găsiţi o parametrizare naturală a curbei

$$x = e^t \cos t, \quad , y = e^t \sin t, \quad z = e^t.$$

Exerciţiul 1.2.2. Demonstraţi că parametrul de-a lungul curbei

$$x = \frac{s}{2}\cos\left(\ln\frac{s}{2}\right), \quad y = \frac{s}{2}\sin\left(\ln\frac{s}{2}\right), \quad z = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

este un parametru natural.

Observaţie. Este de remarcat că, de regulă, parametrul natural de-a lungul unei curbe nu poate fi exprimat în termeni finiţi (adică folosind doar funcţii elementare) în raport cu parametrul de-a lungul curbei. Aceasta este, de fapt, imposibil chiar şi pentru curbe foarte simple, cum ar fi elipsa

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t, \end{cases}$$

cu $a \neq b$, pentru care lungimea arcului se poate exprima doar cu ajutorul funcţiilor eliptice (de aici vine, de fapt, numele acestor funcţii!). De aceea, deşi parametrul natural este foarte important pentru consideraţii teoretice şi demonstraţii, după cum vom vedea, pentru exemple concrete n-o vom folosi aproape deloc.

1.3 Definiţia curbei

După cum am spus, ne putem imagina, intuitiv, o curbă ca fiind, pur şi simplu, o deformare a unei linii drepte, fără să ne gândim, neapărat, la o reprezentare analitică. Ne aşteptăm ca curba să aibă o tangentă bine definită în fiecare punct. În particular, această condiţie trebuie să elimine atât punctele de întoarcere, cât şi autointersecţiile.

Definiţia 1.3.1. O submulţime $M \subset \mathbb{R}^3$ se numeşte *curbă regulară* (sau *o subvarietate 1-dimensională a lui* $\mathbb{R}^3$) dacă, pentru fiecare punct $a \in M$, există o curbă parametrizată regulară $(I, \mathbf{r})$, al cărei suport, $\mathbf{r}(I)$, este o vecinătate deschisă în M a punctului a (adică este o mulţime de forma $M \cap U$, unde U este o vecinătate deschisă a lui a în $\mathbb{R}^3$), în timp ce aplicaţia $\mathbf{r} : I \to \mathbf{r}(I)$ este un omeomorfism, în raport cu topologia de subspaţiu a lui $\mathbf{r}(I)$. O curbă parametrizată cu aceste proprietăţi se numeşte *parametrizare locală* a curbei M în jurul punctului a. Dacă pentru o curbă M există o parametrizare locală $(I, \mathbf{r})$ care este *globală*, adică pentru care $\mathbf{r}(I) = M$, curba se numeşte *simplă*.

Observaţie. În unele cărţi, în definiţie se cere ca aplicaţia $\mathbf{r} : I \to \mathbf{r}(I)$ să fie netedă, ceea ce nu este complet riguros, deoarece $\mathbf{r}(I)$ nu este o submulţime deschisă a lui $\mathbb{R}^3$. Ceea ce se înţelege prin această cerinţă este, totuşi, acelaşi lucru, adică aplicaţia $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ trebuie să fie netedă.

Exemple.

1. Orice dreaptă din $\mathbb{R}^3$ este o curbă simplă, deoarece are o parametrizare globală, dată de o funcţie de forma $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot t$, unde $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ sunt vectori constanţi, $\mathbf{b} \neq 0$.

2. Elicea circulară este o curbă regulară simplă, cu parametrizarea globală $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, dată de $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t, bt)$.

3. Un cerc în $\mathbb{R}^3$ este o curbă regulară, dar nu este simplă, deoarece nici un interval deschis nu poate fi omeomorf cu cercul, care este o submulţime compactă a lui $\mathbb{R}^3$.

Astfel, o curbă regulară este, pur şi simplu, o submulţime a lui $\mathbb{R}^3$ obţinută "lipind în mod neted" suporturi de curbe parametrizate. Dacă examinăm cu atenţie definiţia curbei, remarcăm că nu orice curbă parametrizată poate fi utilizată ca parametrizare locală a unei curbe. Pentru o curbă parametrizată $(I, \mathbf{r})$ arbitrară, aplicaţia $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ nu este injectivă şi, astfel, nu poate fi o parametrizare locală. Menţionăm, de asemenea, că, chiar dacă funcţia este injectivă, $\mathbf{r} : I \to \mathbf{r}(I)$ poate să nu fie un omeomorfism (chiar dacă aplicaţia este continuă şi bijectivă, inversa ei ar putea să nu fie continuă).

Dacă, de exemplu, considerăm curba parametrizată $(I, \mathbf{r})$, cu $I = \mathbb{R}$ şi $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0),$$

atunci suportul acestei curbe parametrizate este cercul unitate în planul de coordonate xOy, cu centrul în origine. Nu trebuie, totuşi, să tragem concluzia că cercul este o curbă simplă, deoarece $\mathbf{r}$ *nu* este un omeomorfism pe imagine (de fapt, aplicaţia nu este nici măcar injectivă, deoarece este periodică).

Să presupunem, acum, că $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ şi $(J, \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(\tau))$ sunt două parametrizări locale ale unei curbe regulare M, în jurul aceluiaşi punct $a \in M$. Atunci, după cum ne putem aştepta, cele două curbe parametrizate sunt echivalente, dacă restrângem intervalele de definiţie astfel încât drumurile să aibă acelaşi suport. Mai precis, are loc următoarea teoremă:

Teorema 1.3.1. *Fie $M \subset \mathbb{R}^3$ o curbă regulară şi $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$, $(J, \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(\tau))$ – două parametrizări locale ale lui M astfel încât $W \equiv \mathbf{r}(I) \cap \boldsymbol{\rho}(J) \neq \emptyset$. Atunci $(\mathbf{r}^{-1}(W), \mathbf{r}|_{\mathbf{r}^{-1}(W)})$ şi $(\boldsymbol{\rho}^{-1}(W), \boldsymbol{\rho}|_{\boldsymbol{\rho}^{-1}(W)})$ sunt curbe parametrizate echivalente.*

Demonstraţie. Fie
$$(I, \mathbf{r}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t))$$
şi
$$(J, \boldsymbol{\rho}(\tau) = (x(\tau), y(\tau), z(\tau))$$
două parametrizări locale ale lui M. Pentru a simplifica notaţiile, vom presupune, de la bun început, că $\mathbf{r}(I) = \boldsymbol{\rho}(J)$. În mod clar, această ipoteză nu reduce generalitatea. Afirmăm că aplicaţia $\lambda : I \to J$, $\lambda = \boldsymbol{\rho}^{-1} \circ \mathbf{r}$, este un difeomorfism care, astfel, furnizează o schimbare de parametru între cele două curbe parametrizate.

λ este, în mod clar, un omeomorfism, ca şi compunere a omeomorfismelor
$$\mathbf{r} : I \to \mathbf{r}(I)$$
şi
$$\boldsymbol{\rho}^{-1} : \boldsymbol{\rho}(J) \to J.$$
În plus, $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} \circ \lambda$. De aceea, tot ce avem de demonstrat este că aplicaţiile λ şi λ^{-1} sunt ambele netede. Am putea fi tentaţi, în acest punct, să reprezentăm λ ca
$$\lambda = \boldsymbol{\rho}^{-1} \circ \mathbf{r}$$
şi să tragem concluzia că λ este netedă, ca şi compoziţie de funcţii netede. În timp ce reprezentarea este legitimă, întrucât atât $\mathbf{r}$ cât şi $\boldsymbol{\rho}$ sunt omeomorfisme pe imagine, $\boldsymbol{\rho}^{-1}$ *nu este* o funcţie diferenţiabilă şi, cel puţin pe moment, nu are sens sâ vorbim despre diferenţiabilitatea sa, deoarece domeniul său de definiţie nu este o submulţime deschisă spaţiului euclidian ambient. Vom demonstra, în schimb, că, local, $\boldsymbol{\rho}^{-1}$ este restricţia unei aplicaţii diferenţiabile definită, de data aceasta, pe o submulţime deschisă a lui $\mathbb{R}^3$.

Deoarece noţiunea de diferenţiabilitate este o noţiune locală, este suficient să demonstrăm că λ este netedă într-o vecinătate a fiecărui punct al intervalului I. Aceasta se poatre realiza, de exemplu, reprezentând, local, λ ca o compunere de funcţii netede. Fie $t_0 \in I$, $\tau_0 = \lambda(t_0)$. Datorită regularităţii aplicaţiei $\boldsymbol{\rho}$, avem $\boldsymbol{\rho}'(\tau_0) \neq 0$. Pyutem presupune, fără a restrânge generalitatea, că prima componentă a acestui vector este nenulă, adică $x'(\tau_0) \neq 0$. Din teorema funcţiei inverse, aplicată funcţiei x, rezultă că există o funcţie netedă $\tau = f(x)$, definită şi netedă într-o vecinătate deschisă $V \subset \mathbb{R}$ a punctului $x_0 = x(\tau_0)$. Atunci, în vecinătatea deschisă

$\boldsymbol{\rho}(f(V))$ a punctului $(x(\tau_0), y(\tau_0), z(\tau_0))$ din M vom avea $\boldsymbol{\rho}^{-1}(x, y, z) = f(x)$, ceea ce înseamnă că, în fapt, avem

$$\boldsymbol{\rho}^{-1}\big|_{\boldsymbol{\rho}(f(V))} = f \circ pr_1|_{\boldsymbol{\rho}(f(V))},$$

unde $pr_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este proiecţia lui $\mathbb{R}^3$ pe primul factor.

Având această expresie pentru $\boldsymbol{\rho}^{-1}$, putem scrie λ într-o vecinătate $\mathbf{r}^{-1}(\boldsymbol{\rho}(f(V)))$ a lui t_0 ca

$$\lambda|_{\mathbf{r}^{-1}(\boldsymbol{\rho}(f(V)))} = \boldsymbol{\rho}^{-1}\big|_{\boldsymbol{\rho}(f(V))} \circ \mathbf{r}|_{\mathbf{r}^{-1}(\boldsymbol{\rho}(f(V)))} = f \circ pr_1|_{\boldsymbol{\rho}(f(V))} \circ \mathbf{r}|_{\mathbf{r}^{-1}(\boldsymbol{\rho}(f(V)))}.$$

Cum funcţiile f, pr_1 şi $\mathbf{r}$ sunt, toate, netede pe domeniile indicate, rezultă că λ este netedă pe vecinătatea deschisă $\mathbf{r}^{-1}(\boldsymbol{\rho}(f(V)))$ a lui t_0. Cum t_0 era arbitrar, λ este netedă pe întregul I. Netezimea lui λ^{-1} se demonstrează analog, schimbând rolurile lui $\mathbf{r}$ şi $\boldsymbol{\rho}$. □

Rezultă din definiţie că orice curbă regulară este , local, suportul unei curbe parametrizate. Global, această observaţie nu este adevărată, decât dacă curba este simplă. De asemenea, în general, suportul unei curbe parametrizate nu este o curbă regulară. Să considerăm, de exemplu, lemniscata lui $(\mathbb{R}, \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)))$, unde

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t(1+t^2)}{1+t^4} \\ y(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^4} \\ z = 0 \end{cases}.$$

$\mathbf{r}$ este continuă, chiar bijectivă, dar inversa nu este continuă. În fapt, suportul are o autointersecţie, deoarece $\lim_{t\to-\infty} \mathbf{r} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{r} = \mathbf{r}(0)$ (vezi figura 1.3). Totuşi, putem restrânge întotdeauna domeniul de definiţie al unei curbe parametrizate regulare astfel încât suportul restricţiei să fie o curbă regulară.

Teorema 1.3.2. *Fie $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ o curbă parametrizată regulară. Atunci fiecare punct $t_0 \in I$ are o vecinătate $W \subset I$ astfel încât $\mathbf{r}(W)$ să fie o curbă regulară.*

Demonstraţie. Regularitatea lui $\mathbf{r}$ în fiecare punct înseamnă, în particular, că $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $x'(t_0) \neq 0$. Să considerăm aplicaţia $\psi : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dată de

$$\psi(t, u, v) = \mathbf{r}(t) + (0, u, v),$$

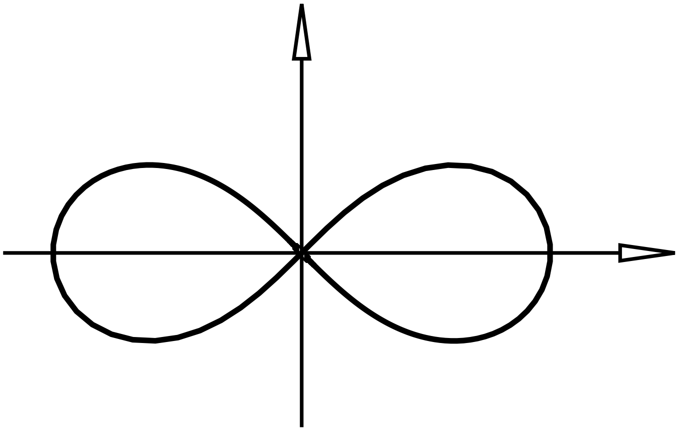


Figura 1.3 – Lemniscata lui Bernoulli

unde $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. ψ este, în mod clar, netedă iar matricea sa Jacobi în punctul $(t_0, 0, 0)$ este dată de

$$J(\psi)(t_0, 0, 0) = \begin{bmatrix} x'(t_0) & 0 & 0 \\ y'(t_0) & 1 & 0 \\ z'(t_0) & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinantul său este

$$\det J(\psi)(t_0, 0, 0) = x'(t_0),$$

de aceea ψ este un difeomorfism local în jurul punctului $(t_0, 0, 0)$. În consecinţă, există vecinătăţile deschise $U \subset \mathbb{R}^3$ a lui $(t_0, 0, 0)$ şi $V \subset \mathbb{R}^3$ a lui $\psi(t_0, 0, 0)$ astfel încât $\psi|_V$ să fie un difeomorfism de la U la V. Să notăm cu $\varphi : V \to U$ inversa ei (care, desigur, este, de asemenea, un difeomorfis, de la V la U, de această dată). Dacă punem

$$W := \{t \in I : (t, 0, 0) \in U\},$$

atunci, în mod clar, W este o vecinătate deschisă a lui t_0 în I astfel încât

$$\varphi(V \cap \mathbf{r}(W)) = \varphi(\psi(W \times \{(0, 0)\}) = W \times \{(0, 0)\}.$$

$\square$

Observaţie. Teorema precedentă joacă un rol conceptual foarte important. Prectic, ne spune că orice proprietate *locală* a unei curbe parametrizate regulare este adevărată şi pentru curbe regulare, dacă roprietatea este invariantă relativ la o schimbare de parametru, *fără* să facem ipoteaza că curba parametrizată, ca aplicaţie, este un omeomorfism pe imagine. Desigur, trebuie să ne luăm toate măsurile de precauţie atunci când investigăm proprietăţi *globale* ale curbelor regulare.

1.4 Reprezentări analitice ale curbelor

1.4.1 Curbe plane

O curbă regulară $M \subset \mathbb{R}^3$ se numeşte *plană* dacă este conţinută într-un plan π. Vom presupune, de regulă, că planul π coincide cu planul de coordonate xOy şi, de aceea, vom folosi doar coordonatele x şi y pentru a descrie astfel de curbe.

Reprezentarea parametrică. Alegem o parametrizare locală $(I, \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ a curbei. Atunci suportul $\mathbf{r}(I)$ al acestei parametrizări locale va fi o submulţime deschisă a curbei. Pentru o parametrizare globală a unei curbe simple, $\mathbf{r}(I)$ este întreaga curbă. Astfel, fiecare punct a al curbei are o vecinătate deschisă care este suportul curbei parametrizate

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} . \tag{1.4.1}$$

Ecuaţiile (1.4.1)se numesc *ecuaţiile parametrice* ale curbei în vecinătatea punctului a. De regulă, cu excepţia cazului în care curba este simplă, nu putem utiliza acelaşi set de ecuaţii parametrice pentru a descrie toate punctele unei curbe.

Reprezentarea explicită. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie netedă, definită pe un interval deschis de pe axa reală. Atunci graficul său

$$C = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}, \tag{1.4.2}$$

este o curbă simplă, care are parametrizarea globală

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} . \tag{1.4.3}$$

Ecuaţia

$$y = f(x) \tag{1.4.4}$$

se numeşte *ecuaţia explicită* a curbei (1.4.2).

În literatură, pentru reprezentarea explicită a unei curbe se mai utilizează şi termenul de *formă neparametrică*. Această denumire nu ni se pare foarte potrivită deoarece, de fapt, o reprezentare explicită poate fi privită ca fiind un caz particular de reprezentare parametrică, parametrul fiind chiar coordonata x .

Reprezentarea implicită. Fie $F : D \to \mathbb{R}$ o funcţie netedă, definită pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$, şi fie

$$C = \{(x, y) \in D \mid F(x, y) = 0\} \tag{1.4.5}$$

mulţimea de nivel 0 a funcţiei F. În general, C nu este o curbă regulară. Tot ce putem spune despre această mulţime este că e o submulţime închisă a planului. Totuşi, dacă în punctul $(x_0, y_0) \in C$, vectorul grad $F = \{\partial_x F, \partial_y F\}$ nu se anulează, de exemplu $\partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$, atunci, din teorema funcţiilor implicite, există:

- o vecinătate deschisă U a punctului (x_0, y_0) în $\mathbb{R}^2$;
- o funcţie netedă $y = f(x)$, definită pe o vecinătate deschisă $I \subset \mathbb{R}$ a punctului x_0,

astfel încât

$$C \cap U = \{(x, f(x)|x \in I\}.$$

Dacă grad $F \neq 0$ în toate punctele lui C, atunci C este o curbă regulară (deşi, în general, nu una simplă).

Figura 1.4 – Bisectoarele axelor de coordonate

Exemple. 1. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Fie

$$(x_0, y_0) \in C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}.$$

Atunci avem

$$\text{grad } F(x_0, y_0) = \{2x_0, 2y_0\}.$$

Evident, întrucât $x_0^2 + y_0^2 = 1$, vectorul grad F nu se poate anula pe C şi, astfel, C este o curbă (cercul unitate cu centrul în origine).

2. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x^2 - y^2$. C nu este o curbă, în acest caz (gradientul se anulează în origine). De fapt, mulţimea C are o autointersecţie în origine (C nu e altceva decât reuniunea celor două bisectoare ale axelor de coordonate, vezi figura 1.4). S-ar putea să nu fie foarte clar de ce avem probleme în vecinătatea originii pentru această “curbă”. Adevărul este că nu există nici o vecinătate a originii (pe C) care să fie omeomorfă cu un interval deschis de pe axa reală. O vecinătate a originii pe C este o intersecţie dintre o vecinătate a originii în plan şi mulţimea C. Acum, dacă restrângem vecinătatea originii în plan, intersecţia sa cu C va fi în formă de cruce. Dacă înlăturăm originea din cruce, rămân patru componente conexe. Pe de altă parte, să presupunem că ar exista un omeomorfism f de la cruce la un interval deschis de pe axa reală. Dacă înlăturăm din interval imaginea originii prin omeomorfismul f, vom obţine, în mod clar, doar două componente conexe. Totuşi, se poate demonstra că numărul de componente conexe rezultate prin înlăturarea unui punct este invariant faţă de omeomorfisme.

Observaţie. Condiţia de nesingularitate a gradientului lui F este doar o condiţie *suficientă* pentru ca ecuaţia $F(x, y) = 0$ să reprezinte o curbă. Dacă gradientul lui F este zero într-un punct, nu putem afirma că ecuaţia descrie o curbă în jurul acelui punct, dar nu putem face nici afirmaţia contrară. Să considerăm, ca un exemplu trivial, ecuaţia

$$F(x, y) \equiv (x - y)^2 = 0.$$

Atunci avem

$$\operatorname{grad} F(x, y) = 2\{x - y, -(x - y)\}$$

iar dacă notăm

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\},$$

atunci $\operatorname{grad} F = 0$ în toate punctele lui C. Dar, în mod clar, C *este* o curbă (e uşor de văzut că este prima bisectoare a axelor de coordonate, adică o dreaptă).

1.4.2 Curbe în spaţiu

Reprezentarea parametrică. Ca şi în cazul curbelor plane, printr-o parametrizare locală

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{1.4.6}$$

putem reprezenta fie întreaga curbă, fie doar o vecinătate a unuia dintre punctele sale.

Reprezentarea explicită. Dacă $f, g : I \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii netede, definite pe un interval deschis al axei reale, atunci mulţimea

$$C = \{(x, f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in I\} \tag{1.4.7}$$

este o curbă netedă, cu parametrizarea globală dată de

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \\ z = g(t) \end{cases} . \tag{1.4.8}$$

Ecuaţiile

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases} \tag{1.4.9}$$

se numesc *ecuaţiile explicite* ale curbei. Remarcăm că, de fapt, fiecare dintre ecuaţiile sistemului (1.4.9) este ecuaţia unei suprafeţe cilindrice, cu generatoarele paralele cu una dintre axele de coordonate. De aceea, reprezentarea explicită a unei curbe înseamnă, de fapt, reprezentarea ei ca o intersecţie a două suprafeţe cilindrice, cu cele două familii de generatoare având direcţii ortogonale.

Reprezentarea implicită. Fie $F, G : D \to \mathbb{R}$, definite pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^3$. Considerăm mulţimea

$$C = \{(x, y, z) \in D \mid F(x, y, z) = 0,\ G(x, y, z) = 0\},$$

cu alte cuvinte, mulţimea soluţiilor pentru sistemul

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases} \tag{1.4.10}$$

În general, mulţimea C nu este o curbă regulară. Totuşi, dacă într-un punct $a = (x_0, y_0, z_0) \in C$ rangul matricii Jacobi

$$\begin{pmatrix} \partial_x F & \partial_y F & \partial_z F \\ \partial_x G & \partial_y G & \partial_z G \end{pmatrix} \tag{1.4.11}$$

este egal cu doi, atunci există o vecinătate deschisă $U \subset D$ a punctului (x_0, y_0, z_0) astfel încât $C \cap U$ — mulţimea soluţiilor sistemului (1.4.10) în U — să fie o curbă. Într-adevăr, să presupunem, de exemplu, că

$$\det \begin{pmatrix} \partial_y F(a) & \partial_z F(a) \\ \partial_y G(a) & \partial_z G(a) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Atunci, din teorema funcţiilor implicite rezultă că există o vecinătate deschisă $U \subset D$ astfel încât mulţimea $C \cap U$ să poată fi scrisă sub forma

$$C \cap U = \{(x, f(x), g(x)) | x \in W\},$$

unde W este o vecinătate deschisă în $\mathbb{R}$ a punctului x_0, în timp ce $y = f(x)$, $z = g(x)$ sunt funcţii netede, definite pe W. Evident, $C \cap U$ este o curbă simplă, iar perechea $(W, \mathbf{r}(t) = (t, f(t), g(t))$ este o parametrizare globală a sa.

Dacă rangul matricei (1.4.11) este doi peste tot, atunci C este o curbă (deşi, în general, nu una simplă).

Exemplu (Fereastra lui Viviani). Un exemplu important de curbă în spaţiu dată prin ecuaţii implicite este aşa-numita *fereastră a lui Viviani*[4]. Această curbă se obţine ca intersecţie dintre sfera cu centrul în origine şi de rază $2a$ şi cilindrul circular de rază a şi cu axa paralelă cu axa Oz, situată la distanţa a faţă de această axă. Cu alte cuvinte, ecuaţiile ferestrei lui Viviani sunt

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, \\ (x - a)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

Este instructiv să facem nişte calcule pentru cazul ferestrei lui Viviani. După cum vom vedea, ea nu este, global, o curbă. Va trebui să îndepărtăm un punct pentru a obţine, într-adevăr, o curbă regulară. Forma ferestrei lui Viviani este uşor de înţeles. Ea este similară cu o lemniscată Bernoulli aşezată pe suprafaţa unei sfere. Fie, aşadar,

$$\begin{cases} F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2, \\ G(x, y, z) = (x - a)^2 + y^2 - a^2. \end{cases}$$

[4]Vincenzo Viviani (1622–1703) a fost un matematician şi arhitect italian, care a fost în contact cu Galileo Galilei în ultimii ani de viaţă ai acestuia şi căruia îi plăcea să se recomande ca “ultimul student al lui Galileo”.

Atunci ecuaţiile curbei se scriu

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Avem, acum,

$$\begin{pmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2(x-a) & 2y & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x & y & z \\ x-a & y & 0 \end{pmatrix}.$$

Pentru a obţine un punct singular, următorul sistem de ecuaţii trebuie să fie verificat:

$$\begin{cases} y = 0 \\ yz = 0 \\ (x-a)z = 0 \end{cases}.$$

În mod clar, singura soluţie a sistemului care verifică şi ecuaţiile curbei este $x = 2a, y = z = 0$. Astfel, fereastra lui Viviani (vezi figura 1.5) este o curbă regulară peste tot, cu excepţia punctului care are aceste coordonate. Nu este dificil de demonstrat că fereastra lui Viviani este, de fapt, suportul curbei parametrizate

$$\mathbf{r}(t) = (a(1+\cos t), a\sin t, 2a\sin\frac{t}{2}),$$

cu $t \in (-2\pi, 2\pi)$. Când calculăm $\mathbf{r}'(t)$, obţinem

$$\mathbf{r}'(t) = \{-a\sin t, a\cos t, a\cos\frac{t}{2}\},$$

ceea ce arată că această curbă parametrizată este regulară. În particular, existenţa acestei reprezentări parametrice regulare a ferestrei lui Viviani arată că punctul de coordonate $x = 2a, y = z = 0$ este, în fapt, un punct de autointersecţie, nu un punct singular.

1.5 Tangenta şi planul normal la o curbă. Normala la o curbă plană

Definiţia 1.5.1. Pentru o curbă parametrizată $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ vectorul $\mathbf{r}'(t_0)$ se numeşte *vectorul tangent* sau *vectorul viteză* al curbei în punctul t_0. Dacă punctul t_0 este regular, atunci dreapta care trece prin $\mathbf{r}(t_0)$ şi are direcţia dată de vectorul $\mathbf{r}'(t_0)$ se numeşte *tangentă la curbă în punctul* $\mathbf{r}(t_0)$ (sau în punctul t_0).

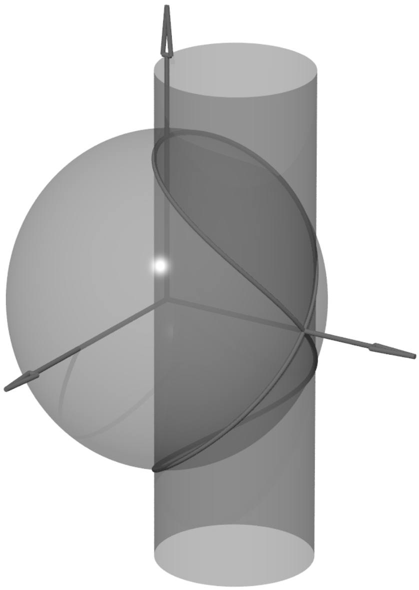


Figura 1.5 – Fereastra lui Viviani

Ecuaţia vectorială a tangentei este, prin urmare:

$$\mathbf{R}(\tau) = \mathbf{r}(t_0) + \tau \mathbf{r}'(t_0). \tag{1.5.1}$$

Exemplu. Elicea cilindrică circulară are parametrizarea

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt),$$

de aceea, pentru un punct t_0,

$$\mathbf{r}'(t_0) = \{-a \cos t_0, a \sin t_0, b\}.$$

Astfel, ecuaţia tangentei la elice este

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(\tau) =&(a \cos t_0 - \tau a \sin t_0, a \sin t_0 + \tau a \cos t_0, bt_0 + \tau b) = \\ =&(a(cost_0 - \tau \sin t_0), a(sint_0 + \tau \cos t_0), b(t_0 + \tau)).\end{aligned}$$

Propoziţia 1.5.1. *Vectorii tangenţi la două curbe parametrizate echivalente, în puncte corespondente, sunt coliniari, în timp ce tangentele coincid.*

Demonstraţie. Fie $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ şi $(J, \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(s))$ cele două curbe parametrizate echivalente şi $\lambda : I \to J$ — schimbarea de parametru, adică $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}(\lambda(t))$. Atunci, în conformitate cu regula de derivare a funcţiilor compuse,

$$\mathbf{r}'(t) = \boldsymbol{\rho}'(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t),$$

unde $\lambda'(t) \neq 0$. □

Observaţii. 1. În mod clar, $\mathbf{r}'$ şi $\boldsymbol{\rho}'$ au acelaşi sens atunci când $\lambda' > 0$ (schimbarea de parametru nu modifică sensul în care este parcurs suportul curbei parametrizate) şi au sensuri opuse atunci când $\lambda' < 0$.

2. Deoarece schimbarea de parametru modifică, în general, vectorul tangent, nu putem defini vectorul tangent într-un punct al unei curbe regulare folosind o parametrizare locală. Totuşi, după cum am văzut, doar sensul şi lungimea vectorului tangent pot să varieze, nu şi direcţia. Astfel, are sens să vorbim despre tangenta într-un punct al unei curbe regulare, definită prin *orice* parametrizare locală a curbei în jurul punctului ales.

Putem utiliza o modalitate mai "geometrică" pentru a defini tangenta la o curbă parametrizată. Fie $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)$ un punct de pe curbă apropiat de punctul $\mathbf{r}(t_0)$. Atunci, din formula lui Taylor, avem

$$\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{r}(t_0) + \Delta t \cdot \mathbf{r}'(t_0) + \Delta t \cdot \boldsymbol{\epsilon}, \tag{1.5.2}$$

unde $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{\epsilon} = 0$. Considerăm o dreaptă arbitrară π, care trece prin $\mathbf{r}(t_0)$ şi are direcţia dată de versorul $\mathbf{m}$. Fie

$$d(\Delta t) \stackrel{\text{def}}{=} d((\mathbf{r}(t_0 + \Delta t), \pi).$$

Teorema 1.5.1. *Dreapta π este tangentă la curba parametrizată $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ în punctul t_0 dacă şi numai dacă*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{d(\Delta t)}{|\Delta t|} = 0. \tag{1.5.3}$$

Demonstraţie. Din formula lui Taylor (1.5.2), avem

$$\Delta \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0) = \Delta t \cdot \mathbf{r}'(t_0) + \Delta t \cdot \boldsymbol{\epsilon}.$$

Distanţa $d(\Delta t)$ este egală cu

$$\|\Delta \mathbf{r} \times \mathbf{m}\| = |\Delta t| \|\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{m} + \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{m}\|.$$

Astfel,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{d(\Delta t)}{|\Delta t|} = \lim_{\Delta t \to 0} \|\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{m} + \underbrace{\boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{m}}_{\to 0}\| = \|\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{m}\|.$$

Acum, dacă dreapta π este tangenta în t_0, atunci vectorii $\mathbf{r}'(t_0)$ şi $\mathbf{m}$ sunt coliniari, atunci $\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{m} = 0$.

Invers, dacă este îndeplinită condiţia (1.5.3), atunci $\|\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{m}\| = 0$, de aceea, fie $\mathbf{r}'(t_0) = 0$ (ceea ce nu se poate întâmpla, deoarece curba parametrizată este regulară), fie vectorii $\mathbf{r}'(t_0)$ şi $\mathbf{m}$ sunt coliniari, adică π este tangenta în t_0. □

Observaţie. Condiţia (1.5.3) este exprimată prin cerinţa ca tangenta şi curba să aibă *un contact de ordinul întâi* (sau un contact de tangenţă). Un alt mod de a interpreta această formulă este acela că tangenta este poziţia limită a unei drepte determinate de punctul ales şi de un punct vecin de pe curbă, atunci când punctul vecin se apropie indefinit de punctul dat.

În continuare, dacă nu se precizează altfel, toate curbele parametrizate vor fi considerate regulare.

Definiţia 1.5.2. Fie $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ o curbă parametrizată şi $t_0 \in I$. *Planul normal* în punctul $\mathbf{r}(t_0)$ al curbei $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ este, prin definiţie, planul care trece prin $\mathbf{r}(t_0)$ şi este perpendicular pe tangenta la curbă în punctul $\mathbf{r}(t_0)$.

Dacă $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ este o curbă parametrizată *plană* (adică suportul său este conţinut într-un plan, pe care îl vom presupune identic cu planul de coordonate xOy), atunci *normala* la curbă în punctul $\mathbf{r}(t_0)$ este, prin definiţie, dreapta ce trece prin $\mathbf{r}(t_0)$ şi este perpendiculară pe tangenta la curbă în punctul $\mathbf{r}(t_0)$.

Observaţie. Întrucât are sens să definim tangenta întrun punct al unei curbe regulare, folosind o parametrizare locală oarecare a curbeivîn jurul punctului respectiv, acelaşi lucru este adevărat pentru planul normal (normala, în cazul curbelor plane).

Ecuaţia vectorială a planului normal (respectiv a normalei) rezultă imediat din definiţie:

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0. \tag{1.5.4}$$

1.5.1 Ecuaţiile tangentei şi planului normal (normalei) pentru diferite reprezentări ale curbelor

Reprezentarea parametrică

Dacă plecăm de la ecuaţia vectorială (1.5.1) a tangentei şi o proiectăm pe axele de coordonate, obţinem ecuaţiile parametrice ale tangentei, adică, pentru curbe în spaţiu,

$$\begin{cases} X(\tau) = x(t_0) + \tau x'(t_0), \\ Y(\tau) = y(t_0) + \tau y'(t_0), \\ Z(\tau) = z(t_0) + \tau z'(t_0), \end{cases} \tag{1.5.5}$$

şi, pentru curbe plane,

$$\begin{cases} X(\tau) = x(t_0) + \tau x'(t_0), \\ Y(\tau) = y(t_0) + \tau y'(t_0). \end{cases} \tag{1.5.6}$$

Dacă eliminăm parametrul τ, obţinem ecuaţiile canonice:

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}, \tag{1.5.7}$$

pentru curbe în spaţiu, respectiv

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'}, \tag{1.5.8}$$

pentru curbe plane.

Cât despre ecuaţia planului normal (normalei), o obţinem din ecuaţia (1.5.4), exprimând-o ca

$$\{X-x, Y-y, Z-z\} \cdot \{x', y', z'\} = 0,$$

pentru curbe în spaţiu şi

$$\{X-x, Y-y\} \cdot \{x', y'\} = 0,$$

pentru curbe plane. Dezvoltând produsele scalare, obţinem:

$$(X-x)x' + (Y-y)y' + (Z-z)z' = 0, \tag{1.5.9}$$

pentru ecuaţia planului normal la o curbă în spaţiu şi, pentru normala la o curbă plană,

$$(X-x)x' + (Y-y)y' = 0. \tag{1.5.10}$$

Reprezentarea explicită

Dacă avem o curbă în spaţiu dată de ecuaţiile

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases},$$

atunci putem construi o parametrizare (globală)

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \\ z = g(t). \end{cases}$$

Pentru derivate, obţinem imediat expresiile

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = f' \\ z' = g', \end{cases}$$

ceea ce, după înlocuire în ecuaţiile (1.5.7), ne conduce, pentru tangentă, la ecuaţiile

$$X - x = \frac{Y - f(x)}{f'(x)} = \frac{Z - g(x)}{g'(x)}, \tag{1.5.11}$$

în timp ce, pentru planul normal, după înlocuirea derivatelor în ecuaţia (1.5.9), obţinem

$$X - x + (Y - f(x))f'(x) + (Z - g(x))g'(x) = 0. \tag{1.5.12}$$

Pentru o curbă plană dată explicit,

$$y = f(x),$$

avem reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t), \end{cases}$$

şi, astfel, ecuaţia tangentei este

$$X - x = \frac{Y - f(x)}{f'(x)} \tag{1.5.13}$$

sau, într-o formă mai familiară,

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x), \tag{1.5.14}$$

while for the normal we get

$$X - x + (Y - f(x))f'(x) = 0 \tag{1.5.15}$$

sau

$$Y - f(x) = -\frac{1}{f'(x)}(X - x). \tag{1.5.16}$$

Reprezentarea implicită

Considerăm o curbă dată prin ecuaţiile implicite

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases} \tag{1.5.17}$$

Să presupunem că într-un punct (x_0, y_0, z_0)

$$\det\begin{pmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{pmatrix} \neq 0$$

Atunci, după cum am văzut mai sus, în jurul acestui punct, curba poate fi reprezentată sub forma

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x), \end{cases} \tag{1.5.18}$$

adică sistemul (1.5.17) poate fi scris ca

$$\begin{cases} F(x, f(x), g(x)) = 0 \\ G(x, f(x), g(x)) = 0. \end{cases}$$

Calculând derivatele totale în raport cu x ale lui F şi G, obţinem sistemul

$$\begin{cases} F'_x + f'(x)F'_y + g'(x)F'_z = 0 \\ G'_x + f'(x)G'_y + g'(x)G'_z = 0, \end{cases}$$

de aceea

$$\begin{cases} f'F'_y + g'F'_z = -F'_x \\ f'G'_y + g'G'_z = -G'_x. \end{cases}$$

Din acest sistem, putem obţine f' şi g', prin regula lui Cramer:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix} \overset{\text{not}}{=} \frac{D(F,G)}{D(y,z)} \overset{\text{ip}}{\neq} 0,\\
\Delta_{f'} &= \begin{vmatrix} -F'_x & F'_z \\ -G'_x & G'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix} \overset{\text{not}}{=} \frac{D(F,G)}{D(z,x)}\\
\Delta_{g'} &= \begin{vmatrix} F'_y & -F'_x \\ G'_y & -G'_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} \overset{\text{not}}{=} \frac{D(F,G)}{D(x,y)},
\end{aligned}$$

de aceea,

$$\begin{cases} f' = \dfrac{\frac{D(F,G)}{D(z,x)}}{\frac{D(F,G)}{D(y,z)}} \\[2ex] g' = \dfrac{\frac{D(F,G)}{D(x,y)}}{\frac{D(F,G)}{D(y,z)}} \end{cases} \tag{1.5.19}$$

Aşa cum am văzut mai sus, pentru curba (1.5.18) ecuaţiile tangentei sunt

$$X - x_0 = \frac{Y - f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{Z - g(x_0)}{g'(x_0)}$$

sau, folosind (1.5.19),

$$X - x_0 = \frac{Y - f(x_0)}{\frac{\frac{D(F,G)}{D(z,x)}}{\frac{D(F,G)}{D(y,z)}}} = \frac{Z - g(x_0)}{\frac{\frac{D(F,G)}{D(x,y)}}{\frac{D(F,G)}{D(y,z)}}},$$

de unde, ţinând cont de faptul că $f(x_0) = y_0$ şi $g(x_0) = z_0$, avem

$$\frac{X - x_0}{\frac{D(F,G)}{D(y,z)}} = \frac{Y - y_0}{\frac{D(F,G)}{D(z,x)}} = \frac{Z - z_0}{\frac{D(F,G)}{D(x,y)}}.$$

Pentru o curbă plană

$$F(x, y) = 0,$$

dacă, într-un punct (x_0, y_0) este verificată condiţia $F'_y \neq 0$, atunci, din teorema funcţiilor implicite, local celpuţin, putem scrie $y = f(x)$, deci ecuaţia curbei se poate scrie

$$F(x, f(x)) = 0.$$

Diferenţiind această relaţie în raport cu x, obţinem

$$F'_x + f' F'_y = 0 \Longrightarrow f' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Astfel, din ecuaţia tangentei:

$$Y - y_0 = f'(x_0)(X - x_0),$$

deducem că

$$Y - y_0 = -\frac{F'_x}{F'_y}(X - x_0)$$

sau

$$(X - x_0)F'_x + (Y - y_0)F'_y = 0,$$

în timp ce pentru normală obţinem ecuaţia

$$(X - x_0)F'_y - (Y - y_0)F'_x = 0.$$

1.6 Planul osculator

Definiţia 1.6.1. O curbă parametrizată $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ se numeşte *biregulară* (sau în poziţie generală) în punctul t_0 dacă vectorii $\mathbf{r}'(t_0)$ şi $\mathbf{r}''(t_0)$ nu sunt coliniari, adică

$$\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0) \neq 0.$$

Curba parametrizată se numeşte *biregulară* dacă ea este biregulară în fiecare punct al domeniului de definiţie[5].

Observaţie. Nu este dificil de verificat că noţiunea de punct biregular este independentă de parametrizare: dacă un punct este biregular pentru o curbă parametrizată dată, atunci corespondentul său prin orice schimbare de parametru este, de asemenea, un punct biregular.

[5]O curbă biregulară se mai numeşte, în unele cărţi, o curbă *completă*. Termenul ni se pare nepotrivit, deoarece el are, de obicei, alt înţeles în teoria globală a curbelor (şi, mai ales, a suprafeţelor).

Definiţia 1.6.2. Fie $(I, \mathbf{r})$ o curbă parametrizată şi $t_0 \in I$ – un punct biregular. *Planul osculator* al curbei în $\mathbf{r}(t_0)$ este planul care trece prin $\mathbf{r}(t_0)$ şi este paralel cu vectorii $\mathbf{r}'(t_0)$ şi $\mathbf{r}''(t_0)$, adică ecuaţia planului este

$$(R - \mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}'(t_0), \mathbf{r}''(t_0)) = 0, \tag{1.6.1}$$

sau, dezvoltând produsul mixt,

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0. \tag{1.6.2}$$

Teorema 1.6.1. *Planele osculatoare a două curbe parametrizate echivalente în puncte biregulare corespondente coincid.*

Demonstraţie. Fie $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ şi $(J, \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(s))$ două curbe parametrizate echivalente şi $\lambda : I \to J$ – schimbarea de parametru. Atunci

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \boldsymbol{\rho}(\lambda(t)), \\ \mathbf{r}'(t) &= \boldsymbol{\rho}'(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t), \\ \mathbf{r}''(t) &= \boldsymbol{\rho}''(\lambda(t)) \cdot (\lambda'(t))^2 + \boldsymbol{\rho}'(\lambda(t)) \cdot \lambda''(t). \end{aligned}$$

Întrucât $\lambda'(t) \neq 0$, din aceste relaţii rezultă că sistemele de vectori $\{\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)\}$ şi $\{\boldsymbol{\rho}'(\lambda(t)), \boldsymbol{\rho}''(\lambda(t))\}$ sunt echivalente, adică ele generează acelaşi subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$, prin urmare, planele osculatoare la cele două curbe în punctele (biregulare) corespondente t_0 şi $\lambda(t_0)$ au acelaşi subspaţiu director, de aceea ele sunt paralele. Cum, pe de altă parte, ele au un punct comun (deoarece $\mathbf{r}(t_0) = \boldsymbol{\rho}(\lambda(t_0))$), ele trebuie să coincidă. $\square$

Observaţie. Din teorema precedentă rezultă că noţiunea de plan osculator are sens şi pentru curbe regulare.

La fel ca în cazul tangentei, există o modalitate mai geometrică de a defini planul osculator, care este, în acelaşi timp, mai generală, deoarece se poate aplica şi pentru cazul punctelor care nu sunt biregulare.

Fie $\mathbf{r}(t_0)$ şi $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)$ două puncte vecine pe o curbă parametrizată, cu $\mathbf{r}(t_0)$ biregular. Considerăm un plan α, de versor normal $\mathbf{e}$, care trece prin $\mathbf{r}(t_0)$, şi notăm cu $d(\Delta t) = d(\mathbf{r}(t_0 + \Delta t), \alpha)$.

Teorema 1.6.2. *α este planul osculator la curba parametrizată $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ în punctul biregular $\mathbf{r}(t_0)$ dacă şi numai dacă*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{d(\Delta t)}{|\Delta t|^2} = 0,$$

adică planul şi curba au un contact de ordinul al doilea.

Demonstraţie. Din formula lui Taylor, avem

$$\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{r}(t_0) + \Delta t \cdot \mathbf{r}'(t_0) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \cdot \mathbf{r}''(t_0) + (\Delta t)^2 \cdot \boldsymbol{\epsilon},$$

cu $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{\epsilon} = 0$.

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} d(\Delta t) &= |\mathbf{e} \cdot (\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0))| = \\ &= |(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}'(t_0)) \cdot \Delta t + \frac{1}{2}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}''(t_0)) \cdot (\Delta t)^2 + (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) \cdot (\Delta t)^2|. \end{aligned}$$

Astfel,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{d(\Delta t)}{|\Delta t|^2} &= \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}'(t_0)}{\Delta t} + \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}''(t_0)) + \underbrace{\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\epsilon}}_{\to 0} \right| = \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}'(t_0)}{\Delta t} + \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}''(t_0)) \right|. \end{aligned}$$

Dacă $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{d(\Delta t)}{|\Delta t|^2} = 0$, atunci $\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$ şi $\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}''(t_0) = 0$, adică $\mathbf{e} \parallel \mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)$, ceea ce înseamnă că α este planul osculator.

Reciproca este evidentă. $\square$

Observaţii. (i) Teorema precedentă justifică numele de plan osculator. De fapt, numele (inventat de Johann Bernoulli), provine din verbul latin *osculare*, care înseamnă *a săruta* şi scoate în evidenţă faptul că, printre toate planele care trec printr-un punct dat al unei curbe, planul osculator are contactul de ordinul cel mai înalt ("cel mai apropiat").

(ii) Dacă definim planul osculator prin intermediul contactului, putem defini noţiunea de plan osculator şi pentru puncte care nu sunt biregulare, dar, în acest caz, orice plan care trece prin tangentă este osculator, în sensul că are un contact de ordinul al doilea cu curba. A spune că planul osculator într-un punct biregular este singurul plan care are care are un contact de ordinul al doilea cu curba este acelaşi lucru cu a spune că că planul osculator este poziţia limită a unui plan care determinat de punctul considerat şi de două puncte vecine, atunci când aceste puncte se apropie indefinit de cel dat. De asemenea, putem defini planul osculator într-un punct biregular al unei curbe parametrizate ca fiind poziţia limită a unui plan care trece prin tangenta în punctul dat şi un punct vecin de pe curbă, atunci când punctul vecin se apropie indefinit de cel dat.

O întrebare naturală pe care ne-o putem pune este: ce se întâmplă în cazul curbelor parametrizate plane? Răspunsul este dat de următoarea propoziţie, a cărei demonstraţie o lăsăm în seama cititorului:

Propoziţia 1.6.1. *Dacă o curbă parametrizată biregulară este plană, adică suportul său este conţinut într-un plan π, atunci planul osculator în fiecare punct al acestei curbe coincide cu planul curbei. Reciproc, dacă o curbă parametrizată biregulară are acelaşi plan osculator în fiecare dintre punctele sale, atunci curba este plană, iar suportul său este conţinut în planul osculator.*

1.7 Curbura unei curbe

Fie $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ o curbă parametrizată regulară. Fie $(J, \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(s))$ o curbă parametrizată natural echivalentă cu ea. Atunci $\|\boldsymbol{\rho}'(s)\| = 1$, în timp ce vectorul $\boldsymbol{\rho}''(s)$ rdtr perpendicular pe $\boldsymbol{\rho}'(s)$[6].

Se poate demonstra că $\boldsymbol{\rho}''(s)$ nu depinde de alegerea curbei parametrizate natural echivalentă cu curba dată $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Într-adevăr, dacă $(J_1, \boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_1(\tilde{s}))$ este o altă curbă parametrizată natural echivalenă cu cea dată, cu schimbarea de parametru $\tilde{s} = \lambda(s)$, atunci, din condiţia

$$\|\boldsymbol{\rho}'(s)\| = \|\boldsymbol{\rho}_1'(\lambda(s))\| = 1,$$

[6]Într-adevăr, întrucât $\boldsymbol{\rho}'$ este un vector unitate, avem $\boldsymbol{\rho}'^2 = 1$. Diferenţiind această relaţie, obţinem că $\boldsymbol{\rho}' \cdot \boldsymbol{\rho}'' = 0$, ceea ce exprimă faptul că cei doi vectori sunt ortogonali.

obţinem $|\lambda'(s)| = 1$ pentru orice $s \in J$. Astfel, $\lambda' = \pm 1$ şi, de aceea, $\tilde{s} = \pm s + s_0$, unde s_0 este o constantă. Rezultă că

$$\boldsymbol{\rho}''(s) = \boldsymbol{\rho}_1''(\tilde{s})\underbrace{(\lambda'(s))^2}_{=1} + \boldsymbol{\rho}'_1 \cdot \underbrace{\lambda''(s)}_{=0} = \boldsymbol{\rho}''_1(\tilde{s}).$$

Definiţia 1.7.1. Vectorul $\mathbf{k} = \boldsymbol{\rho}''(s(t))$ se numeşte *vectorul de curbură* al curbei parametrizate $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ în punctul t, iar norma sa, $k(t) = \|\boldsymbol{\rho}''(s(t))\|$, se numeşte *curbura* curbei parametrizate în punctul t.

Vom exprima acum vectorul de curbură $\mathbf{k}(t)$ în funcţie de $\mathbf{r}(t)$ şi de derivatele sale. Alegem ca parametru natural lungimea arcului de curbă. Atunci avem

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= \boldsymbol{\rho}(s(t)) \Rightarrow \\
\mathbf{r}'(t) &= \boldsymbol{\rho}'(s(t)) \cdot s'(t) \\
\mathbf{r}''(t) &= \boldsymbol{\rho}''(s(t)) \cdot (s'(t))^2 + \boldsymbol{\rho}'(s(t)) \cdot s''(t),
\end{aligned}$$

unde $s'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|,\ s''(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|' = \dfrac{d}{dt}\left(\sqrt{\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}'(t)}\right) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$. Astfel, avem

$$\mathbf{k}(t) = \boldsymbol{\rho}''(s(t)) = \frac{\mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}'\|^2} - \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}'\|^4}\cdot\mathbf{r}'. \tag{1.7.1}$$

Acum, întrucât vectorii $\boldsymbol{\rho}'$ şi $\boldsymbol{\rho}''$ sunt perpendiculari, în timp ce $\boldsymbol{\rho}'$ este de lungime 1, avem

$$k(t) = \|\mathbf{k}(t)\| = \|\boldsymbol{\rho}''\| = \|\boldsymbol{\rho}' \times \boldsymbol{\rho}''\|.$$

Înlocuind $\boldsymbol{\rho}' = \dfrac{\mathbf{r}'}{\|\boldsymbol{\rho}'\|}$, şi $\boldsymbol{\rho}''$ prin formula (1.7.1), obţinem

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3}. \tag{1.7.2}$$

Observaţii. 1. Din formula (1.7.2) rezultă că o curbă parametrizată $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ este biregulară într-un punct t_0 dacă şi numai dacă $k(t_0) \neq 0$.

2. Întrucât pentru 2 curbe parametrizate curbele parametrizate natural echivalente cu ele sunt echivalente între ele, rezultă că noţiunea de curbură are sens şi pentru curbe regulare.

Exemple. 1. Pentru dreapta $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$ vectorul de curbură (şi, de aceea, şi curbura) se anulează identic.

2. Pentru cercul $S_R^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = R^2,\ z = 0\}$, alegem parametrizarea
$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \qquad 0 < t < 2\pi. \\ z = 0 \end{cases}$$
Atunci
$$\mathbf{r}'(t) = \{-R\sin t, R\cos t, 0\}, \quad \mathbf{r}''(t) = \{-R\cos t, R\sin t, 0\}$$
şi, astfel, $\|\mathbf{r}'(t)\| = R$, $\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t) = 0$. De aceea, pentru vectorul de curbură obţinem
$$\mathbf{k}(t) = \left\{-\frac{1}{R}\cos t, -\frac{1}{R}\sin t, 0\right\} = -\frac{1}{R}\{x, y, z\}, \quad k(t) = \frac{1}{R}.$$

Observaţii. 1. Calculele pe care le-am făcut mai sus explică de ce inversa curburii unei curbe se numeşte *raza de curbură* a curbei.

2. Am văzut că curbura unei drepte este identic nulă. Reciproca acestei afirmaţii este, de asemenea, adevărată, cel puţin într-un anume sens, după cum arată următoarea propoziţie.

Propoziţia 1.7.1. *Dacă curbura unei curbe parametrizate regulare este identic nulă, atunci suportul acestei curbe este situat pe o dreaptă.*

Demonstraţie. Presupunem, de la bun început, că avem de-a face cu o curbă parametrizată natural $(I, \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(s))$. Din ipoteză, $\boldsymbol{\rho}''(s) = 0$, de aceea $\boldsymbol{\rho}'(s) = \mathbf{a} = \text{const}$, $\boldsymbol{\rho}(s) = \boldsymbol{\rho}_0 + s\mathbf{a}$, adică suportul $\boldsymbol{\rho}(I)$ este situat pe o dreaptă. Cum două curbe parametrizate echivalente au acelaşi suport, rezultatul rămâne adevărat şi pentru curbe care nu sunt parametrizate natural. □

Observaţie. Faptul că o curbă parametrizată are curbură zero înseamnă doar că *suportul* curbei este situat pe o dreaptă, dar nu înseamnă, neapărat, că acea curbă parametrizată este o aplicaţie afină de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}^3$ sau restricţia unei astfel de aplicaţii, nici că curba este echivalentă cu o astfel de curbă parametrizată particulară. Putem considera, ca mai înainte, curba parametrizată $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t^3$,unde $\mathbf{a}$ este un vector constant nenul din $\mathbb{R}^3$. Atunci avem, imediat, că $\mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{a}t^2$ şi $\mathbf{r}''(t) = 3\mathbf{a}t$, adică viteza şi acceleraţia curbei sunt paralele, adică curba are curbură zero dar, aşa cum am văzut deja, această curbă parametrizată nu este echivalentă cu o curbă cu o parametrizare afină.

1.7.1 Semnificaţia geometrică a curburii

Considerăm o curbă parametrizată natural $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(s))$. Notăm cu $\Delta\varphi(s)$ măsura unghiului format de versorii $\mathbf{r}(s)$ şi $\mathbf{r}(s + \Delta s)$. Atunci

$$\|\mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s)\| = 2\left|\sin\frac{\Delta\varphi(s)}{2}\right|.$$

De aceea,

$$k(s) = \|\mathbf{r}''(s)\| = \left\|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s)}{\Delta s}\right\| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\left|\sin\frac{\Delta\varphi(s)}{2}\right|}{|\Delta s|} =$$
$$= \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi(s)}{\Delta s}\right|\cdot\frac{\left|\sin\frac{\Delta\varphi(s)}{2}\right|}{\left|\frac{\Delta\varphi(s)}{2}\right|} = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi(s)}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|.$$

Astfel, dacă ţinem cont de faptul că $\Delta\varphi(s)$ este măsura unghiului dintre tangentele la curbă în s şi $s + \Delta s$, ultima formulă ne dă:

Propoziţia 1.7.2. *Curbura unei curbe parametrizate este modulul vitezei de rotaţie a tangentei la curbă, atunci când punctul de tangenţă se mişcă de-a lungul curbei cu viteză unitate.*

1.8 Reperul Frenet (reperul mobil) al unei curbe parametrizate

În fiecare punct al unei curbe parametrizate biregulare $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ putem construi un reper afin al spaţiului $\mathbb{R}^3$. Ideea este că, dacă vrem să investigăm proprietăţile locale ale unei curbe parametrizate în jurul unui punct dat al curbei, atunci este mult mai uşor să facem asta dacă nu utilizăm sistemul de coordonate standard al lui $\mathbb{R}^3$, ci un sistem de coordonate cu originea într-un punct dat al curbei, în timp ce axele de coordonate au anumite legături cu proprietăţile locale ale curbei. Un astfel de sistem de coordonate a fost construit, în mod independent, la mijlocul secolului al XIX-lea, decătre matematicienii francezi Frenet şi Serret.

Definiţia 1.8.1. *Reperul lui Frenet* (sau *reperul mobil* al unei curbe parametrizate biregulare $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ în punctul $t_0 \in I$ este un reper ortonormat al spaţiului $\mathbb{R}^3$, cu originea în punctul $\mathbf{r}(t_0)$, versorii de coordonate fiind vectorii $\{\boldsymbol{\tau}(t_0), \boldsymbol{\nu}(t_0), \boldsymbol{\beta}(t_0)\}$, unde:

- $\boldsymbol{\tau}(t_0)$ este versorul tangentei la curbă în t_0, adică
$$\boldsymbol{\tau}(t_0) = \frac{\mathbf{r}'(t_0)}{\|\mathbf{r}'(t_0)\|};$$
- $\boldsymbol{\nu}(t_0) = \mathbf{k}(t_0)/k(t_0)$ este versorul vectorului de curbură:
$$\boldsymbol{\nu}(t_0) = \frac{\mathbf{k}(t_0)}{k(t_0)}$$
şi se numeşte *versorul normalei principale* în punctul t_0;
- $\boldsymbol{\beta}(t_0) = \boldsymbol{\tau}(t_0) \times \boldsymbol{\nu}(t_0)$ se numeşte *versorul binormalei* în punctul t_0.

- Axa de direcţie $\boldsymbol{\tau}(t_0)$ este, evident, *tangenta* la curbă în t_0.
- Axa de direcţie $\boldsymbol{\nu}(t_0)$ se numeşte *normală principală*. De fapt, această dreaptă este conţinuă în planul normal (deoarece este perpendiculară pe tangentă), dar este, de asemenea, conţinută în planul osculator. Astfel, *normala principală este normala conţinută în planul osculator*.
- Axa de direcţie $\boldsymbol{\beta}(t_0)$ se numeşte *binormală. Binormala este normala perpendiculară pe planul osculator*.
- Planul determinat de vectorii $\{\boldsymbol{\tau}(t_0), \boldsymbol{\nu}(t_0\}$ este planul osculator (O în figura **??**).
- Planul determinat de vectorii $\{\boldsymbol{\nu}(t_0), \boldsymbol{\beta}(t_0)\}$ este planul normal (N în figura **??**).
- Planul determinat de vectorii $\{\boldsymbol{\tau}(t_0), \boldsymbol{\beta}(t_0)\}$ se numeşte *plan rectificator*, pentru motive care vor deveni clare mai târziu (R în figura **??**).

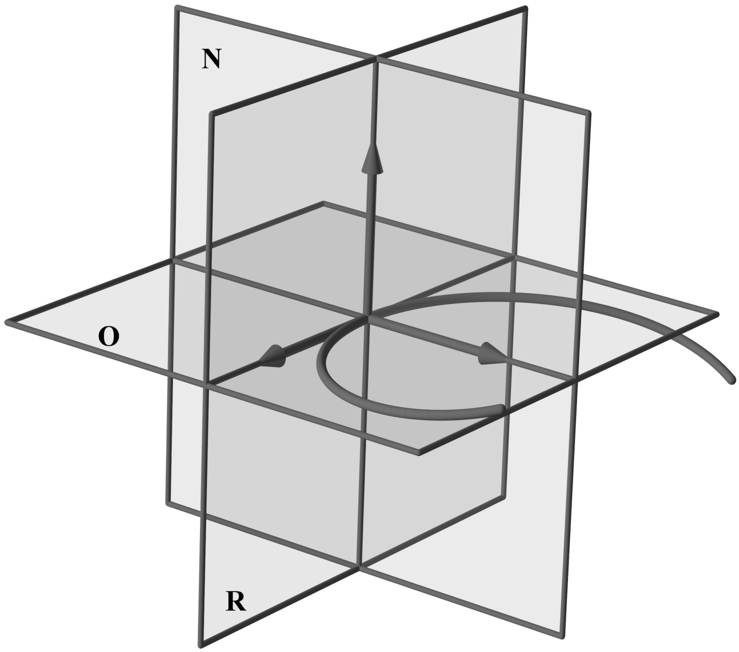


Figura 1.6 – Reperul Frenet al unei curbe parametrizate

Pentru o curbă parametrizată natural $(J, \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(s))$, expresiile pentru vectorii triedrului Frenet sunt destul de simple:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}(s) & = \boldsymbol{\rho}'(s) \\ \boldsymbol{\nu}(s) & = \dfrac{\boldsymbol{\rho}''(s)}{\|\boldsymbol{\rho}''(s)\|} \\ \boldsymbol{\beta}(s) & \equiv \boldsymbol{\tau}(s) \times \boldsymbol{\nu}(s) = \dfrac{\boldsymbol{\rho}'(s) \times \boldsymbol{\rho}''(s)}{\|\boldsymbol{\rho}''(s)\|} \end{cases}. \tag{1.8.1}$$

Pentru o curbă parametrizată biregulară oarecare $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ situaţia este ceva mai complicată. Astfel, în mod evident, din definiţie, într-un punct oarecare $t \in I$ avem

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}. \tag{1.8.2}$$

Astfel, întrucât

$$\mathbf{k}(t) = \frac{\mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|^2} - \frac{\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|^4}\cdot\mathbf{r}'(t)$$

şi

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3},$$

obţinem

$$\boldsymbol{\nu}(t) \equiv \frac{\mathbf{k}(t)}{k(t)} = \frac{\|\mathbf{r}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|}\cdot\mathbf{r}''(t) - \frac{\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|\cdot\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|}\cdot\mathbf{r}'(t), \quad (1.8.3)$$

în timp ce

$$\boldsymbol{\beta}(t) \equiv \boldsymbol{\tau}(t)\times\boldsymbol{\nu}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|}. \quad (1.8.4)$$

Observaţie. Calculele de mai sus arată că, în practică, pentru o curbă parametrizată oarecare $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ este mai simplu să calculăm direct $\boldsymbol{\tau}$ şi $\boldsymbol{\beta}$ şi apoi să calculăm $\boldsymbol{\nu}$ cu formula

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\tau}.$$

1.8.1 Comportamentul reperului Frenet faţă de o schimbare de parametru

O noţiune definită pentru o curbă parametrizată are sens şi pentru o curbă regulară dacă şi numai dacă este invariantă faţă de o schimbare de parametru, cu alte cuvinte, dacă nu se modifică atunci când înlocuim curba parametrizată cu altă curbă parametrizată, echivalentă cu ea. Reperul Frenet este "aproape" invariant, adică avem:

Teorema 1.8.1. *Fie $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ şi $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(u)$ două curbe parametrizate echivalente, cu schimbarea de parametru $\lambda : I \to J$, $u = \lambda(t)$. Atunci, în punctele corespondente t şi $u = \lambda(t)$, reperele lor Frenet coincid dacă $\lambda'(t) > 0$. Dacă $\lambda'(t) < 0$, atunci originile şi versorii normalelor principale coincid, în timp ce celelalte două perechi de versori au direcţii comune, dar sensuri opuse.*

Demonstraţie. Întrucât $\mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\rho}(\lambda(t))$, originile reperelor Frenet coincid întotdeauna. După cum am văzut mai sus, vectorii de curbură a două curbe parametrizate echivalente coincid şi, astfel, acelaşi lucru este adevărat şi pentru versorii normalelor principale. Din $\mathbf{r}'(t) = \boldsymbol{\rho}'(\lambda(t))\cdot\lambda'(t)$ rezultă coincidenţa reperelor Frenet pentru $\lambda'(t) > 0$.

Dacă $\lambda'(t) < 0$, atunci vectorii tangenţi, $\boldsymbol{\rho}'(u)$ şi $\mathbf{r}'(t)$ au sensuri opuse şi acelaşi lucru este adevărat şi pentru versorii lor. Din $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}$ rezultă că, în acest caz, şi versorii binormalelor au sensuri opuse, deşi direcţiile lor coincid. □

1.9 Curbe orientate. Reperul Frenet al unei curbe orientate

După cum am văzut mai sus, reperul Frenet al unei curbe parametrizate nu este invariant faţă de o schimbare de parametru (sau, cel puţin, nu faţă de *orice* schimbare de parametru). De aceea, pentru a putea folosi acest aparat şi pentru curbe regulare, trebuie să îl facem invariant. Ideea este să modificăm puţin definiţia curbei regulare, pentru a ne asigura că schimbările de parametru nu modifică reperele Frenet.

Definiţia 1.9.1. Două curbe parametrizate $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ şi $(J, \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(u))$ se numesc *pozitiv echivalente* dacă există o schimbare de parametru $\lambda : I \to J$, $u = \lambda(t)$, cu $\lambda'(t) > 0$, $\forall t \in I$.

Definiţia 1.9.2. O *orientare* a unei curbe regulare $C \subset \mathbb{R}^3$ este o familie de parametrizări locale $\{(I_\alpha, \mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha(t))\}_{\alpha \in A}$ astfel încât

a) $C = \bigcup\limits_{\alpha \in A} \mathbf{r}_\alpha(I_\alpha)$;

b) pentru orice componentă conexă $C^b_{\alpha\beta}$ a intersecţiei $C_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha(I_\alpha) \cap \mathbf{r}_\beta(I_\beta)$ cu $\alpha, \beta \in A$, curbele parametrizate $(I^b_\alpha, \mathbf{r}^b_\alpha)$ şi $(I^b_\beta, \mathbf{r}^b_\beta)$, cu $I^b_\alpha = \mathbf{r}_\alpha^{-1}(C^b_{\alpha\beta})$, $\mathbf{r}^b_\alpha = \mathbf{r}_\alpha|_{I^b_\alpha}$, $I^b_\beta = \mathbf{r}_\beta^{-1}(C^0_{\alpha\beta})$, $\mathbf{r}^b_\beta = \mathbf{r}_\beta|_{I^b_\beta}$ sunt pozitiv echivalente.

Exemplu. Pentru cercul unitate S^1 parametrizările:

$$(I_1 = (0, 2\pi), \mathbf{r}_1(t) = (\cos t, \sin t, 0))$$

şi

$$(I_2 = (-\pi, \pi), \mathbf{r}_2(t) = (\cos t, \sin t, 0))$$

dau o orientare a curbei.

Într-adevăr, se observă imediat că suporturile celor două curbe parametrizate acoperă S^1. Pe de altă parte, intersecţia $C_{12} = \mathbf{r}_1(I_1) \cap \mathbf{r}_2(I_2)$ are două componente conexe (semicercul superior şi cel inferior).

Începând cu componenta superioară, C_{12}^1, avem

$$I_1^1 = \mathbf{r}_1^{-1}(C_{12}^1) = (0, \pi),$$
$$I_2^1 = \mathbf{r}_2^{-1}(C_{12}^1) = (0, \pi)$$

iar schimbarea de parametru este identitatea, $\lambda : (0, \pi) \to (0, \pi)$, $\lambda(t) = t$, $\forall t \in (0, \pi)$, de aceea cele două curbe parametrizate sunt, în mod evident, pozitiv echivalente.

În ceea ce priveşte componenta inferioară, C_{12}^2, obţinem

$$I_1^2 = \mathbf{r}_1^{-1}(C_{12}^2) = (\pi, 2\pi),$$
$$I_2^2 = \mathbf{r}_2^{-1}(C_{12}^2) = (-\pi, 0)$$

iar schimbarea de parametru este $\mu : I_1^2 \to I_2^2$, $\mu(t) = t - 2\pi$, de aceea, întrucât $\mu'(t) = 1 > 0$, şi de data aceasta cele două parametrizări locale sunt pozitiv echivalente.

Definiţia 1.9.3. O curbă regulară $C \subset \mathbb{R}^3$, pe care s-a ales o orientare, se numeşte *curbă regulară orientată*.

Exemplu. Dacă C este o curbă regulară simplă, ea poate fi transformată într-o curbă orientată folosind orientarea dată de orice parametrizare *globală* $(I, \mathbf{r})$.

Observaţie. Dacă C este o curbă regulară conexă, ea are doar două orientări distincte, corespunzătoare celor două sensuri posibile de mişcare pe curbă.

Definiţia 1.9.4. O parametrizare locală $(I, \mathbf{r})$ a unei curbe regulare orientate C se numeşte *compatibilă cu orientarea* definită de familia $\{(I_\alpha, \mathbf{r}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ dacă pe intersecţiile $\mathbf{r}(I) \cap \mathbf{r}_\alpha(I_\alpha)$ curbele parametrizate $(I, \mathbf{r})$ şi $(I_\alpha, \mathbf{r}_\alpha)$ sunt pozitiv echivalente.

Observaţie. Pentru o curbă regulară orientată C, cu orientarea dată de familia de parametrizări locale $\{(I_\alpha, \mathbf{r}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, putem defini, folosind vectorii $\mathbf{r}'{}_\alpha(t)$, un sens pe fiecare tangentă, deoarece, când trecem la o altă parametrizare locală $\mathbf{r}_\beta(t)$, vectorii $\mathbf{r}'{}_\alpha$ şi $\mathbf{r}'{}_\beta$ au aceeaşi direcţie şi acelaşi sens (doar normele lor, eventual, diferă).

Orientarea însăşi poate fi dată printr-o alegere a sensului pe fiecare dreaptă tangentă. Astfel, dacă direcţia tangentei în r at $x \in C$ este dată de vectorul $\mathbf{a}(x)$, atunci trebuie să impunem continuitatea aplicaţiei $C \to \mathbb{R}^3$, $x \to \mathbf{a}(x)$. Pentru această definiţie a orientării, o parametrizare locală $(I, \mathbf{r})$ este compatibilă cu orientarea dacă, pentru orice punct $x \in C$, $x = \mathbf{r}(t)$, vectorii $\mathbf{a}(x)$ şi $\mathbf{r}'(t)$ au acelaşi sens.

Definiţia 1.9.5. Reperul Frenet al unei curbe orientate biregulare C într-un punct $x \in C$ este reperul Frenet al unei curbe parametrizate biregulare $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ în t_0, unde $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ este o parametrizare locală a curbei C, compatibilă cu orientarea, astfel încât $\mathbf{r}(t_0) = x$.

Observaţie. În mod clar, această definiţie nu depinde de alegerea parametrizării locale, compatibilă cu orientarea curbei.

1.10 Formulele lui Frenet. Torsiunea

Fie $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ o curbă parametrizată biregulară. Atunci vectorii $\boldsymbol{\tau}(t)$, $\boldsymbol{\nu}(t)$, $\boldsymbol{\beta}(t)$ sunt, în fapt, funcţii vectoriale netede în raport cu parametrul t. Vrem să găsim derivatele lor în raport cu t, mai precis, descompunerile acestor derivate în raport cu vectorii $\{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}\}$. Aceste derivate arată, în fapt, modul în care variază vectorii lui Frenet de-a lungul curbei. Din definiţie, avem

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} = \frac{\mathbf{r}'}{\sqrt{\mathbf{r}'^2}}.$$

De aceea,

$$\boldsymbol{\tau}' = \frac{\mathbf{r}'' \cdot \|\mathbf{r}'\| - \mathbf{r}' \cdot \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}'\|}}{\|\mathbf{r}'\|^2} = \frac{\mathbf{r}'' \cdot \|\mathbf{r}'\|^2 - \mathbf{r}'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'')}{\|\mathbf{r}'\|^3} =$$

$$= \|\mathbf{r}'\| \cdot \underbrace{\frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3}}_{k} \left[\underbrace{\frac{\|\mathbf{r}'\|}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|} \cdot \mathbf{r}'' - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}'\| \cdot \|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|} \cdot \mathbf{r}'}_{\boldsymbol{\nu}} \right].$$

Astfel,

$$\boldsymbol{\tau}' = \|\mathbf{r}'\| k \cdot \boldsymbol{\nu}. \tag{1.10.1}$$

Mai mult,

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\tau}' \times + \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}' = k(\underbrace{\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}}_{=0}) + \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}' \;\Rightarrow \boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}',$$

deci $\boldsymbol{\beta}' \perp \boldsymbol{\tau}$. Pe de altă parte,

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} = 1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\beta}' \cdot \boldsymbol{\beta} = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\beta}' \perp \boldsymbol{\beta}.$$

Astfel, vectorul $\boldsymbol{\beta}'$ este coliniar cu vectorul r $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\tau}$ şi putem scrie

$$\boldsymbol{\beta}' = -\|\mathbf{r}'\| \cdot \chi \boldsymbol{\nu},$$

unde χ este un factor de proporţionalitate, a cărui semnificaţie va fi lămurită mai târziu.

Derivăm, acum, egalitatea

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\tau}.$$

Avem

$$\boldsymbol{\nu}' = \boldsymbol{\beta}' \times \boldsymbol{\tau} + \beta \times \boldsymbol{\tau}' = -\|\mathbf{r}'\| \cdot \chi(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\tau}) + \|\mathbf{r}'\| \cdot k(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\nu}),$$

de aceea,

$$\boldsymbol{\nu}' = \|\mathbf{r}'\|(-k\boldsymbol{\tau} + \chi\boldsymbol{\beta}). \tag{1.10.2}$$

Am obţinut, astfel, ecuaţiile

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}'(t) = \|\mathbf{r}'\| k(t) \boldsymbol{\nu}(t) \\ \boldsymbol{\nu}'(t) = \|\mathbf{r}'\|(-k(t)\boldsymbol{\tau}(t) + \chi(t)\boldsymbol{\beta}(t)) \\ \boldsymbol{\beta}'(t) = -\|\mathbf{r}'\| \chi(t) \boldsymbol{\nu}(t). \end{cases} \tag{1.10.3}$$

Aceste ecuaţii se numesc *formulele lui Frenet* pentru curba parametrizată $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Dacă avem de-a face cu o curbă parametrizată natural $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(s)$, atunci ecuaţiile lui Frenet sunt un pic mai simple:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}'(t) = k(t) \boldsymbol{\nu}(t) \\ \boldsymbol{\nu}'(t) = -k(t)\boldsymbol{\tau}(t) + \chi(t)\boldsymbol{\beta}(t) \\ \boldsymbol{\beta}'(t) = -\chi(t) \boldsymbol{\nu}(t). \end{cases} \tag{1.10.3$'$}$$

Definiţia 1.10.1. Mărimea $\chi(t)$ se numeşte *torsiunea* (sau *cea de-a doua curbură*) a curbei parametrizate biregulare $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ în punctul t.

Vom calcula, mai întâi, torsiunea pentru o curbă parametrizată natural $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(s)$. Pentru o astfel de curbă, versorii triedrului Frenet sunt daţi de expresiile:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\rho}' \\ \boldsymbol{\nu} = \frac{1}{k} \boldsymbol{\rho}'' \\ \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{k} \boldsymbol{\rho}' \times \boldsymbol{\rho}''. \end{cases}$$

Din cea de-a treia formulă Frenet, avem:

$$\boldsymbol{\beta}' \cdot \boldsymbol{\nu} = -\chi(s) \cdot \underbrace{(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu})}_{=1} = -\chi(t).$$

Dar, pe de altă parte, din definiţie,

$$\boldsymbol{\beta}' = \left(\frac{1}{k}\right)' + \frac{1}{k}\underbrace{\boldsymbol{\rho}'' \times \boldsymbol{\rho}''}_{=0} + \frac{1}{k}\boldsymbol{\rho}' \times \boldsymbol{\rho}''',$$

deci

$$\chi = -\boldsymbol{\beta}' \cdot \boldsymbol{\nu} = -\underbrace{\left(\frac{1}{k}\right)' \left(\boldsymbol{\rho}' \times \boldsymbol{\rho}''\right) \cdot \frac{1}{k}\boldsymbol{\rho}''}_{=0} - \frac{1}{k}\left(\boldsymbol{\rho}' \times \boldsymbol{\rho}'''\right) \cdot \frac{1}{k}\boldsymbol{\rho}'',$$

de aceea,

$$\chi = \frac{1}{k^2}\left(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}'', \boldsymbol{\rho}'''\right). \tag{1.10.4}$$

Următoarea teoremă ne oferă o modalitate de a calcula torsiunea pentru o curbă parametrizată biregulară oarecare:

Teoremă. *Dacă $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ şi $(J, \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(u))$ sunt două curbe parametrizate biregulare pozitiv echivalente, cu schimbarea de parametru $\lambda : I \to J$, $\lambda' > 0$, atunci ele au aceeaşi torsiune în punctele corespondente t şi $u = \lambda(t)$.*

Demonstraţie. Fie $\{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}\}$, respectiv $\{\boldsymbol{\tau_1}, \boldsymbol{\nu_1}, \boldsymbol{\beta_1}\}$ reperele Frenet ale celor două puncte parametrizate în punctele corespondente t şi $u\lambda(t)$ şi χ şi χ_1 – torsiunile lor în aceste puncte. Atunci

$$\boldsymbol{\beta_1}(\lambda(t)) = \boldsymbol{\beta}(t)$$
$$\boldsymbol{\nu_1}(\lambda(t)) = \boldsymbol{\nu}(t),$$

$$\mathbf{r}'(t) = \boldsymbol{\rho}'(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t) \;\Rightarrow\; \mathbf{r}'(t) = \frac{d}{du}(\boldsymbol{\beta_1}(u))\lambda'(t).$$

Din ultima ecuaţie Frenet pentru curba $\mathbf{r}$, obţinem

$$\boldsymbol{\beta}'(t) \cdot \boldsymbol{\nu}(t) = -\|\mathbf{r}'(t)\| \cdot \chi(t),$$

adică

$$\chi(t) = -\frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\cdot \boldsymbol{\beta}'(t)\cdot \boldsymbol{\nu}(t) = -\frac{1}{\|\boldsymbol{\rho}'(\lambda(t))\|\cdot\lambda'(t)}\cdot \boldsymbol{\beta_1}'(\lambda(t))\cdot\lambda'(t)\cdot\boldsymbol{\nu_1}(\lambda(t)) =$$
$$= -\frac{1}{\|\boldsymbol{\rho}'(\lambda(t))\|}\cdot\left(-\|\boldsymbol{\rho}'(\lambda(t))\|\cdot\chi_1(\lambda(t))\right) = \chi_1(\lambda(t)),$$

unde am folosit încă o dată ultima ecuaţie a lui Frenet, dar de data asta pentru curba $\boldsymbol{\rho}$, ca şi faptul că vectorul $\boldsymbol{\nu_1}(\lambda(t))$ are lungimea unu. □

Fie acum $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(s)$ o curbă parametrizată natural, positiv echivalentă cu curba parametrizată $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, unde $s = \lambda(t)$ este schimbarea de parametru. Atunci $\mathbf{r}$ şi derivatele sale până la ordinul al treilea se pot exprima în funcţie de $\boldsymbol{\rho}$ şi derivatele sale ca:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= \boldsymbol{\rho}(\lambda(t))\\
\mathbf{r}'(t) &= \boldsymbol{\rho}'(\lambda(t))\cdot\lambda'(t)\\
\mathbf{r}''(t) &= \boldsymbol{\rho}''(\lambda(t))\cdot\lambda'^2(t) + \boldsymbol{\rho}'(\lambda(t))\cdot\lambda''(t)\\
\mathbf{r}'''(t) &= \boldsymbol{\rho}'''(\lambda(t))\cdot\lambda'^3(t) + 3\boldsymbol{\rho}''(\lambda(t))\cdot\lambda'(t)\cdot\lambda''(t) + \boldsymbol{\rho}'(\lambda(t))\cdot\lambda'''(t),
\end{aligned}$$

de aceea produsul mixt al primelor trei derivate ale lui $\mathbf{r}$ devine

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{r}'(t),\mathbf{r}''(t),\mathbf{r}'''(t)\right) = \Big(&\boldsymbol{\rho}'(\lambda(t))\cdot\lambda'(t), \boldsymbol{\rho}''(\lambda(t))\cdot\lambda'^2(t) + \boldsymbol{\rho}'(\lambda(t))\cdot\lambda''(t),\\
&\boldsymbol{\rho}'''(\lambda(t))\cdot\lambda'^3(t) + 3\boldsymbol{\rho}''(\lambda(t))\cdot\lambda'(t)\cdot\lambda''(t) + \boldsymbol{\rho}'(\lambda(t))\cdot\lambda'''(t)\Big) =\\
&= \lambda'^6(t)\left(\boldsymbol{\rho}'(\lambda(t)),\boldsymbol{\rho}''(\lambda(t)),\boldsymbol{\rho}'''(\lambda(t))\right).
\end{aligned}$$

Toate celelalte produse mixte din membrul al doilea se anulează, deoarece doi dintre factori sunt coliniari. Deci

$$\left(\boldsymbol{\rho}'(\lambda(t)),\boldsymbol{\rho}''(\lambda(t)),\boldsymbol{\rho}'''(\lambda(t))\right) = \frac{1}{\lambda'^6(t)}\left(\mathbf{r}'(t),\mathbf{r}''(t),\mathbf{r}'''(t)\right).$$

Dar, întrucât $\boldsymbol{\rho}$ este parametrizată natural, iar cele două curbe sunt pozitiv echivalente, avem $\lambda' = \|\mathbf{r}'\|$, de aceea formula precedetă devine

$$\left(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\rho}'',\boldsymbol{\rho}'''\right) = \frac{(\mathbf{r}',\mathbf{r}'',\mathbf{r}''')}{\|\mathbf{r}'\|^6}.$$

În plus (vezi (1.7.2)), curbura poate fi exprimată în funcţie de derivatele lui $\mathbf{r}$ prin formula

$$k = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3},$$

deci, din expresia torsiunii, (1.10.4) şi relaţia precedentă, obţinem

$$\chi(t) = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2}. \tag{1.10.5}$$

Exerciţiul 1.10.1. Fie $\boldsymbol{\omega} = \chi\boldsymbol{\tau} + k\boldsymbol{\beta}$. Arătaţi că formulele lui Frenet se pot scrie astfel:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\nu}' = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu} \\ \boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\beta} \end{cases} \tag{1.10.6}$$

Vectorul $\boldsymbol{\omega}$ se numeşte *vectorul lui Darboux*.

1.10.1 Semnificaţia geometrică a torsiunii

Torsiunea este, într-un anume sens, analoagă curburii (acesta este motivul pentru care, în cărţile vechi, ea se numeşte *cea de-a doua curbură*). Ceea ce vrem să spunem este că şi torsiunea poate fi interpretată ca fiind viteza de rotaţie a unei drepte, de data asta fiind vorba despre binormală. Cu alte cuvinte, avem

Propoziţia 1.10.1. *Dacă* $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(s))$ *este o curbă parametrizată natural şi* $\Delta\alpha$ *este unghiul dintre planele osculatoare la curbă în* $\mathbf{r}(s)$ *şi* $\mathbf{r}(s + \Delta s)$ *(cu alte cuvinte, unghiul dintre binormalele la curbă în acele puncte), atunci avem*

$$\chi(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}.$$

Remarcăm că, de data aceasta, spre deosebire de cazul curburii, torsiunea este *valoarea algebrică* a limitei, nu valoarea absolută. Trebuie să spunem, totuşi, că curbura unei curbe în spaţiu este is *definită* ca fiind pozitivă, deoarece nu s-a putut găsi o semnificaţie geometrică a semnului curburii. După cum vom vedea în cele ce urmează, pentru curbe plane putem defini o *curbură cu semn* a cărei valoare absolută va fi egală cu curbura şi care ne va ajuta să obţinem informaţii suplimentare despre curbă.

Aşa cum am spus deja, torsiunea este analoagă curburii. Astfel, curbura este măsura abaterii curbei de la o linie dreaptă. Pe de altă parte, torsiunea este o măsură a abaterii a curbei de la o curbă plană. Mai precis, avem

Teorema 1.10.1. *Suportul unei curbe parametrizate biregulare se află într-un plan dacă şi numai dacă torsiunea curbei este identic nulă.*

Demonstraţie. Fie $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ o curbă parametrizată biregulară astfel încât $\mathbf{r}(I) \subset \pi$, unde π este un plan. Atunci, în mod evident, vectorii $\mathbf{r}'(t)$ şi $\mathbf{r}''(t)$ sunt paraleli cu acest plan care, după cum ştim, este planul osculator al curbei. De aceea, $\boldsymbol{\beta}(t) =$ const,deci avem

$$0 = \boldsymbol{\beta}'(t) = -\underbrace{\|\mathbf{r}'\|}_{\neq 0} \cdot \chi(t) \cdot \underbrace{\boldsymbol{\nu}(t)}_{\neq 0} \Rightarrow \chi(t) \equiv 0.$$

Reciproc, dacă $\chi(t) \equiv 0$, atunci versorul binormalei, $\boldsymbol{\beta}(t)$, este întotdeauna egal cu un vector constant, $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{0}}$. Dar $\boldsymbol{\beta}(t) = \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$,de aceea vectorul $\mathbf{r}'(t)$ este întotdeauna perpendicular pe vectorul constant $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{0}}$. Astfel, avem seria de implicaţii

$$\mathbf{r}'(t) \cdot \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{0}} = (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{0}})' = 0 \Rightarrow \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{0}} = const = \mathbf{r}_{\mathbf{0}} \cdot \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{0}} \Rightarrow (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\mathbf{0}}) \times \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{0}} = 0,$$

adică suportul lui $\mathbf{r}(I)$ al curbei este conţinut într-un plan perpendicular pe vectorul constant $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{0}}$ şi care trece prin punctul $\mathbf{r}_0$. □

1.10.2 Alte aplicaţii ale formulelor lui Frenet

Am văzut că curbura unei curbe parametrizate se anulează identic dacă şi numai dacă suportul curbei se află pe o dreaptă. Pe de altă parte, ştim că curbura unui cerc este constantă şi este egală cu inversa razei cercului. Ne putem aştepta ca şi reciproca să fie adevărată, cu alte cuvinte, dacă curbura unei curbe parametrizate este constantă, atunci suportul curbei să fie situată pe un cerc. Din păcate, această afirmaţie nu este adevărată. E suficient să ne gândim la elicea cilindrică circulară care are curbură constantă (şi, de asemenea, torsiune constantă). Avem, totuşi, următorul rezultat, mai slab:

Propoziţia 1.10.2. *Dacă* $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(s))$ *este o curbă parametrizată natural, cu curbura* k *egală cu o constantă strict pozitivă* k_0*, în timp ce torsiunea sa este identic egală cu zero, atunci suportul curbei se află pe un cerc de rază* $1/k_0$.

Demonstraţie. Întrucât torsiunea este identic nulă, curba este plană. considerăm curba parametrizată $(I, \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(s))$, unde

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \frac{1}{k_0}\boldsymbol{\nu}. \tag{*}$$

Derivăm în raport cu s şi obţinem, folosind cea de-a doua formulă lui Frenet pentru $\mathbf{r}$,

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}' + \frac{1}{k_0}\boldsymbol{\nu}' = \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{k_0}(-k_0\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} = 0.$$

Astfel, curba $\mathbf{r}_1$ se reduce la un punct, de exemplu $\mathbf{r}_1(s) \equiv \mathbf{c} = \mathbf{const}$. Dar din (*) obţinem

$$\|\mathbf{r} - c\| = \left\| \frac{1}{k_0}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} \right\| = \frac{1}{k_0},$$

ceea ce înseamnă că orice punct al suportului curbei $\mathbf{r}$ se află la o distanţă (constantă) $1/k_0$ faţă de punctul fix $\mathbf{c}$, adică suportul $\mathbf{r}(I)$ se află pe cerul de rază $1/k_0$, cu centrul în $\mathbf{c}$. $\square$

O altă situaţie interesantă este cea în care suportul curbei este situat nu într-un plan, ci pe o sferă. În acest caz, avem

Propoziţia 1.10.3. *Dacă o curbă parametrizată natural $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(s))$ are suportul pe o sferă cu centrul în origine şi de rază a, atunci curbura curbei verifică inegalitatea*

$$k \geq \frac{1}{a}.$$

Demonstraţie. Distanţa de la un punct al curbei până la origine este egală cu $\|\mathbf{r}\|$, adică avem $\mathbf{r}^2 = a^2$. Derivând această egalitate, obţinem $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = 0$ sau $\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$. Dacă mai derivăm o dată, obţinem

$$\mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\tau}' = 0,$$

sau

$$1 + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\tau}' = 0 \iff 1 + k\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \implies k\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nu} = -1.$$

Din proprietăţile produsului scalar, avem

$$|\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nu}| \leq \|\mathbf{r}\| \cdot \|\boldsymbol{\nu}\| = \|\mathbf{r}\| = a,$$

de aceea,

$$k = |k| = \frac{1}{|\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nu}|} \geq \frac{1}{\|\mathbf{r}\|\cdot\|\boldsymbol{\nu}\|} = \frac{1}{a}.$$

□

În figura 1.7 dăm un exemplu de curbă situată pe o sferă. Este aşa-numita *elice sferică*, deoarece este atât o elice generală (vezi secţiunea care urmează), cât şi o curbă sferică.

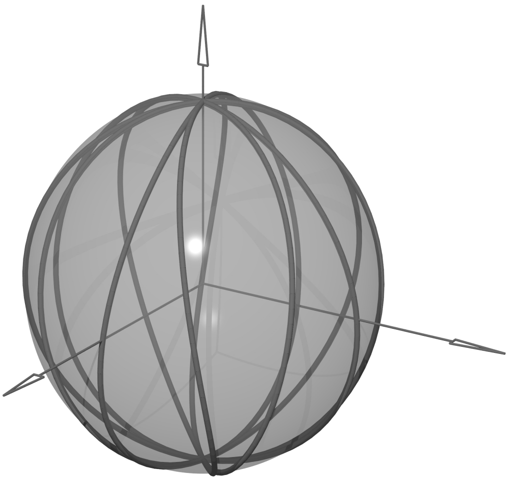


Figura 1.7 – O elice sferică

1.10.3 Elici generale. Teorema lui Lancret

Definiţia 1.10.2. O curbă parametrizată $(I, \mathbf{r})$ se numeşte *elice generală* dacă tangentele sale fac un unghi constant cu o direcţie fixă în spaţiu.

Următoarea teoremă a fost formulată în anul 1802, de către matematicianul francez Paul Lancret, dar prima demonstraţie cunoscută aparţine unui alt celebru matematician francez, A. de Saint Venant (1845).

Teorema 1.10.2 (Lancret, 1802)**.** *O curbă în spaţiu cu curbura $k > 0$ este o elice generală dacă şi numai dacă raportul dintre torsiunea şi curbura sa este constant.*

Demonstraţie. Să presupunem, pentru început, că avem de-a face cu o curbă parametrizată în raport cu lungimea arcului. Pentru a demonstra prima implicaţie, să presupunem că $\mathbf{r}$ este o elice generală şi fie $\mathbf{c}$ versorul direcţiei fixe:

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c} = \cos\alpha_0 = const.$$

Derivând relaţia de mai sus, obţinem

$$\boldsymbol{\tau}' \cdot \mathbf{c} = 0,$$

deci

$$k \cdot \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0.$$

Cum, prin ipoteză, $k > 0$, rezultă că

$$\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0,$$

adică, în fiecare punct al curbei, $\mathbf{c} \perp \boldsymbol{\nu}$. Aceasta înseamnă că $\mathbf{c}$ este planul rectificant şi, de aceea,

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{c} = \sin\alpha_0.$$

Derivând relaţia $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c} = 0$, obţinem, ţinând cont de faptul că $\mathbf{c}$ este constant şi folosind a doua formulă a lui Frenet:

$$(-k\boldsymbol{\tau} + \chi\boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{c} = 0,$$

ceea ce conduce la

$$-k \cdot \cos\alpha_0 + \chi \cdot \sin\alpha_0 = 0,$$

adică

$$\frac{\chi}{k} = \cot\alpha_0 = const.$$

Reciproc, să presupunem că

$$\frac{\chi(s)}{k(s)} = c_0 = const,$$

sau

$$c_0 \cdot k - \chi = 0.$$

Pe de altă parte, din prima şi a treia formulă a lui Frenet, obţinem

$$(c_0 \cdot k - \chi)\boldsymbol{\nu} = c_0\boldsymbol{\tau}' + \boldsymbol{\beta}' = 0.$$

Integrăm o dată şi obţinem

$$c_0\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}^*,$$

unde $\mathbf{c}^* \neq 0$ este un vector constant.

Definim

$$\mathbf{c} := \frac{\mathbf{c}^*}{\|\mathbf{c}^*\|} = \frac{c_0\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\beta}}{\|c_0\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\beta}\|} = \frac{c_0\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\beta}}{\sqrt{1 + c_0^2}},$$

în timp ce

$$\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{c_0}{\sqrt{1 + c_0^2}} = const \leq 1.$$

Prin urmare, vectorii $\mathbf{c}$ şi $\boldsymbol{\tau}$ fac un unghi constant, iar curba este o elice generală. □

Încheiem acest paragraf remarcând, ca o curiozitate istorică, faptul că, deşi în majoritatea cărţilor această teoremă este atribuită lui Lancret, în realitate, el (ca şi Saint-Venant), au demonstrat o singură implicaţie, prima: pe o elice generală, raportul dintre curbură şi torsiune este constant. Cealaltă implicaţie a fost enunţată şi demonstrată abia mai târziu, de către Joseph Bertrand (vezi, de exemplu, cartea lui Eisenhart [16]).

1.10.4 Curbe Bertrand

O problemă interesantă în teoria curbelor este dacă este posibil ca mai multe curbe să aibă aceeaşi familie de tangente, de normale principale sau de binormale. Pentru tangente, se constată cu uşurinţă că răspunsul este negativ: familia de tangente determină complet curba. Pentru normalele principale, problema, ridicată de acelaşi Saint-Venant, a primit un răspuns din partea lui Joseph Bertrand, care a descoperit că, pentru o curbă arbitrară, răspunsul este negativ, dar că există, totuşi, curbe care au aceleaşi normale principale cu alte curbe. Aceste curbe se numesc *curbe Bertrand*. De regulă, pentru o curbă Bertrand dată, există o singură (altă) curbă care are aceleaşi normale principale. Vom spune că cele două curbe sunt *perechi Bertrand* sau că ele sunt *curbe Bertrand asociate sau conjugate*. Surprinzător, dacă o curbă Bertrand are mai mult de o pereche Bertrand, atunci are o infinitate, iar curba este o elice cilindrică circulară (şi acelaşi lucru este valabil pentru toate perechile sale).

Vom demonstra, în cele ce urmează, o serie de rezultate interesante legate de curbele Bertrand, fără a respecta ordinea istorică. Fie $\mathbf{r}$ şi $\mathbf{r}^*$ o pereche Bertrand. Vom presupune că prima curbă este parametrizată natural. Atunci a doua curbă depinde, de asemenea, de lungimea arcului s al primei curbe şi vom presupune că $\mathbf{r}^*(s)$ este punctul de pe perechea Bertrand care are aceeaşi normală principală ca şi prima curbă în **s**. Cele două puncte se numesc *corespondente*. Avem următorul rezultat:

Teorema 1.10.3 (Schell)**.** *Unghiul tangentelor la două curbe Bertrand asociate în puncte corespondente este constant.*

Demonstraţie. În mod clar, dacă $\boldsymbol{\nu}(s)$ este versorul normalei principale la prima curbă, atunci avem

$$\mathbf{r}^*(s) = \mathbf{r}(s) + a(s)\boldsymbol{\nu}(s). \tag{1.10.7}$$

Cum cele două curbe au aceleaşi normale principale, cea de-a doua curbă trebuie să aibă acelaşi versor al normalei principale

$$\boldsymbol{\nu}^*(s) = \pm\boldsymbol{\nu}(s), \tag{1.10.8}$$

Derivăm relaţia (1.10.7) în raport cu s şi obţinem

$$\frac{d\mathbf{r}^*}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} + a\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} + \frac{da}{ds}\mathbf{r} \tag{1.10.9}$$

sau, folosind cea de-a doua formulă a lui Frenet,

$$\frac{d\mathbf{r}^*}{ds} = (1 - ak)\,\boldsymbol{\tau} + \frac{da}{ds}\boldsymbol{\nu} + a\chi\boldsymbol{\beta}. \tag{1.10.10}$$

Vectorul $\frac{d\mathbf{r}^*}{ds}$ este tangent la cea de-a doua curbă, de aceea este perpendiculară atât pe $\boldsymbol{\nu}^*$ cât şi pe $\boldsymbol{\nu}$. Deducem, înmulţind ambii membrii ai ecuaţiei (1.10.10) cu $\boldsymbol{\nu}$, că $\frac{da}{ds} = 0$, adică a este o constantă. Prin urmare, relaţia (1.10.10) se transformă în

$$\frac{d\mathbf{r}^*}{ds} = (1 - ak)\,\boldsymbol{\tau} + a\chi\boldsymbol{\beta}. \tag{1.10.11}$$

Notăm cu s^* lungimea arcului celei de-a doua curbe. Atunci

$$\boldsymbol{\tau}^* = \frac{d\mathbf{r}^*}{ds^*} = \frac{dr^*}{ds}\frac{ds}{ds^*} \tag{1.10.12}$$

sau, folosind (1.10.11)

$$\boldsymbol{\tau}^* = (1 - ak)\,\frac{ds}{ds^*}\boldsymbol{\tau} + a\chi\frac{ds}{ds^*}\boldsymbol{\beta}. \tag{1.10.13}$$

Fie ω unghiul dintre tangentele la cele două curbe în puncte corespondente. Atunci acest unghi este dat de

$$\cos\omega = \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}^*, \tag{1.10.14}$$

unde, desigur, $\boldsymbol{\tau}^*$ este versorul tangentei celei de-a doua curbe în punctul $\mathbf{r}^*(s)$. În funcţie de ω, $\boldsymbol{\tau}^*$ şi versorul binormalei celei de-a doua curbe, $\boldsymbol{\beta}^*$, pot fi scrişi ca

$$\boldsymbol{\tau}^* = \cos\omega\boldsymbol{\tau} + \sin\omega\boldsymbol{\beta}, \tag{1.10.15}$$

$$\boldsymbol{\beta}^* = \varepsilon\left(-\sin\omega\boldsymbol{\tau} + \cos\omega\boldsymbol{\beta}\right), \tag{1.10.16}$$

unde $\varepsilon = \pm 1$.

Derivăm relaţia (1.10.15) în raport cu s şi obţinem:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}^*}{ds} = -\sin\omega\frac{d\omega}{ds}\boldsymbol{\tau} + k\cos\omega\boldsymbol{\nu} + \cos\omega\frac{d\omega}{ds}\boldsymbol{\beta} - \chi\sin\omega\boldsymbol{\nu}. \tag{1.10.17}$$

Dacă înmulţim scalar ambii membrii ai relaţiei (1.10.17) cu $\boldsymbol{\tau}$ şi apoi cu $\boldsymbol{\beta}$ şi folosim faptul că, pe baza primei formule a lui Frenet, $\frac{d\boldsymbol{\tau}^*}{ds}$ este coliniar cu $\boldsymbol{\nu}^*$ şi, astfel, şi cu $\boldsymbol{\nu}$, obţinem relaţiile:

$$\sin\omega\frac{d\omega}{ds} = 0, \quad \cos\omega\frac{d\omega}{ds} = 0, \tag{1.10.18}$$

adică $\frac{d\omega}{ds} = 0$, deci ω este constant. □

Următoarea teoremă a fost demonstrată de către Joseph Bertrand şi este considerată rezultatul central al teoriei curbelor Bertrand.

Teorema 1.10.4 (Bertrand)**.** *O curbă* $\mathbf{r}$ *este o curbă Bertrand dacă şi numai dacă curbura şi torsiunea sa verifică o relaţie de forma*

$$a\cdot k + b\cdot\chi = 1, \tag{1.10.19}$$

cu a şi b constante.

Demonstraţie. Să presupunem că $\mathbf{r}$ este o curbă Bertrand. Comparând relaţiile (1.10.13) şi (1.10.15), obţinem

$$\cos\omega = (1 - ak)\,\frac{ds}{ds^*}, \tag{1.10.20}$$

$$\sin\omega = a\chi\frac{ds}{ds^*}. \tag{1.10.21}$$

Împărţind aceste relaţii membru cu membru, obţinem

$$\operatorname{ctg}\omega = \frac{1 - ak}{a\chi} \tag{1.10.22}$$

sau

$$1 - ak = a\chi \operatorname{ctg}\omega. \tag{1.10.23}$$

Dacă notăm

$$b = a \operatorname{ctg}\omega, \tag{1.10.24}$$

obţinem relaţia (1.10.19).

Reciproc, să presupunem că are loc relaţia (1.10.19). Fie $\mathbf{r}^*$ curba dată de (1.10.7), unde a este constanta din ecuaţia (1.10.19). Derivând relaţia (1.10.7), obţinem, după cum am văzut mai devreme, relaţia (1.10.11). Cum baza $\{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}\}$ este ortonormată, conchidem, din (1.10.11), că

$$\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 = (1 - ak)^2 + a^2\chi^2 \tag{1.10.25}$$

sau, folosind (1.10.25),

$$\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 = (a^2 + b^2)\chi^2, \tag{1.10.26}$$

de unde

$$\chi \frac{ds}{ds^*} = \text{const.} \tag{1.10.27}$$

În acelaşi mod, rezultă că

$$(1 - ak)\frac{ds}{ds^*} = \text{const.} \tag{1.10.28}$$

Ţinând cond de aceste două relaţii, derivăm relaţia (1.10.13) şi obţinem, folosind prima şi a treia formulă ale lui Frenet pentru curba $\mathbf{r}$:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}^*}{ds} = \left[k(1 - ak) - a\chi^2\right] \frac{ds}{ds^*}\boldsymbol{\nu} \tag{1.10.29}$$

sau, folosind prima formulă a lui Frenet pentru curba $\mathbf{r}^*$:

$$k^*\boldsymbol{\nu}^* = \left[k(1 - ak) - a\chi^2\right] \left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2 \boldsymbol{\nu}, \tag{1.10.30}$$

de unde rezultă că $\boldsymbol{\nu}^* = \pm\boldsymbol{\nu}$, adică, într-adevăr, $\mathbf{r}$ este o curbă Bertrand. □

Corolarul 1.10.1. *Elicele cilindrice circulare, curbele de torsiune constantă (în particular, curbele plane) şi curbele de curbură constantă sunt curbe Bertrand.*

Observaţie. Pentru o curbă plană, normalele principale sunt, de fapt, normalele la curbă, de aceea, după cum se poate vedea uşor, orice curbă plană are o infinitate de perechi Bertrand, toate congruente între ele (ele sunt, de fapt, paralele cu curba dată).

Corolarul 1.10.2. *Dacă o curbă Bertrand are mai mult de o pereche, atunci are o infinitate şi este o elice cilindrică circulară.*

Demonstraţie. După cum am văzut în demonstraţia teoremei lui Bertrand, constanta a din relaţia (1.10.19) este cea care identifică o pereche Betrand a curbei noastre. Astfel, dacă o curbă $\mathbf{r}$ are mai mult de o pereche Bertrand, aceasta înseamnă că există (cel puţin) două perechi de numere reale (a, b), (a_1, b_1) astfel încât

$$\begin{aligned} a \cdot k + b \cdot \chi &= 1, \\ a_1 \cdot k + b_1 \cdot \chi &= 1. \end{aligned}$$

Scăzând aceste două relaţii membru cu membru, obţinem

$$(a - a_1) \cdot k = (b_1 - b) \cdot \chi.$$

Cel puţin unul dintre coeficienţii $(a - a_1)$ şi $(b_1 - b)$ este diferit de zero, de aceea, raportul dintre curbură şi torsiune este constant. Aceasta înseamnă, via teoremei lui Lancret, că curba este o elice generală. Totuşi, cum, de exemplu, $\chi = c \cdot k$, cu c – constantă, din (1.10.19) rezultă că

$$(a + b \cdot c) \cdot k = 1,$$

ceea ce înseamnă că curbura k (şi, deci, şi torsiunea χ) este o constantă, deci elipsa este o elipsă cilindrică *circulară*. În mod clar, pentru cazul unei elici cilindrice circulare, când atât curbura, cât şi torsiunea sunt constante, putem găsi o infinitate de perechi de numere reale care verifică (1.10.19), prin urmare curba noastră are o infinitate de perechi Bertrand. Ele sunt situate pe cilindrii circulari care au aceeaţi axă de simetrie cu cilindrul asociat cu curba dată. $\square$

1.11 Comportamentul local al unei curbe parametrizate în jurul unui punct biregular

Fie $(I, \mathbf{r})$ o curbă parametrizată natural. Vom presupune că $0 \in I$, ca punct interior, iar $M_0 \equiv \mathbf{r}(0)$ este un punct biregular al curbei. Vom folosi următoarele notaţii: $\boldsymbol{\tau}_0 = \boldsymbol{\tau}(0)$, $\boldsymbol{\nu}_0 = \boldsymbol{\nu}(0)$, $\boldsymbol{\beta}_0 = \boldsymbol{\beta}(0)$.

Dezvoltăm $\mathbf{r}$ în serie Taylor în jurul originii. Dacă ne oprim la ordinul trei în s, obţinem

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(0) + s\mathbf{r}'(0) + \frac{1}{2}s^2\mathbf{r}''(0) + \frac{1}{6}s^3\mathbf{r}'''(0) + o(s^3). \tag{1.11.1}$$

Vrem să exprimăm derivatele lui $\mathbf{r}$ în funcţie de vectorii Frenet $\boldsymbol{\tau}_0, \boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\beta}_0$. Cum $\mathbf{r}$ este parametrizată natural, avem

$$\mathbf{r}'(0) = \boldsymbol{\tau}_0. \tag{1.11.2}$$

Pe de altă parte, din definiţia vectorului de curbură avem

$$\mathbf{r}''(0) = \mathbf{k}(0) = k(0) \cdot \boldsymbol{\nu}_0. \tag{1.11.3}$$

În plus, dacă derivăm relaţia

$$\mathbf{r}''(s) = \mathbf{k}(s) = k(s) \cdot \boldsymbol{\nu} \tag{1.11.4}$$

obţinem

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'''(s) &= k'(s)\boldsymbol{\nu} + k(s)\boldsymbol{\nu}' = k'(s)\boldsymbol{\nu} + k(s)(-k(s)\boldsymbol{\tau} + \chi(s)\boldsymbol{\beta}) = \\ &= -k^2(s)\boldsymbol{\tau} + k'(s)\boldsymbol{\nu} + k(s)\chi(s)\boldsymbol{\beta}, \end{aligned} \tag{1.11.5}$$

unde am folosit ce-a de-a doua ecuaţie a lui Frenet

Înlocuind $s = 0$ în (1.11.5), obţinem

$$\mathbf{r}'''(0) = -k^2(0)\boldsymbol{\tau}_0 + k'(0)\boldsymbol{\nu}_0 + k(0)\chi(0)\boldsymbol{\beta}_0. \tag{1.11.6}$$

Astfel, relaţia (1.11.1) devine

$$\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(0) = s\boldsymbol{\tau}_0 + \frac{1}{2}s^2k(0)\boldsymbol{\nu}_0 + \frac{1}{6}s^3\left(-k^2(0)\boldsymbol{\tau}_0 + k'(0)\boldsymbol{\nu}_0 + k(0)\chi(0)\boldsymbol{\beta}_0\right) + o(s^3) \tag{1.11.7}$$

sau

$$\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(0)=\left(s-\frac{1}{6}k^2(0)s^3+o(s^3)\right)\boldsymbol{\tau}_0+\left(\frac{1}{2}k(0)s^2+\frac{1}{6}k'(0)s^3+o(s^3)\right)\boldsymbol{\nu}_0+$$
$$+\left(\frac{1}{6}k(0)\chi(0)s^3+o(s^3)\right)\boldsymbol{\beta}_0. \tag{1.11.8}$$

Considerăm, acum, un reper de coordonate cu originea în M_0 şi având ca axe axele lui Frenet în acest punct. Vectorul de poziţie al unui punct de pe curbă relativ la acest reper este chiar vectorul $\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(0)\equiv\overrightarrow{M_0M}$, unde $M=\mathbf{r}(s)$. De aceea, proiectând (1.11.8) pe axe, obţinem,

$$\begin{cases} x(s) &= s-\frac{1}{6}k^2(0)s^3+o(s^3)\\ y(s) &= \frac{1}{2}k(0)s^2+\frac{1}{6}k'(0)s^3+o(s^3)\\ z(s) &= \frac{1}{6}k(0)\chi(0)s^3+o(s^3)\end{cases}. \tag{1.11.9}$$

Nu e dificil de constatat că local, suficient de aproape de 0, avem următoarele relaţii între coordonate, care ne dau, în fapt, ecuaţiile proiecţiilor curbei pe planele de coordonate ale reperului lui Frenet:

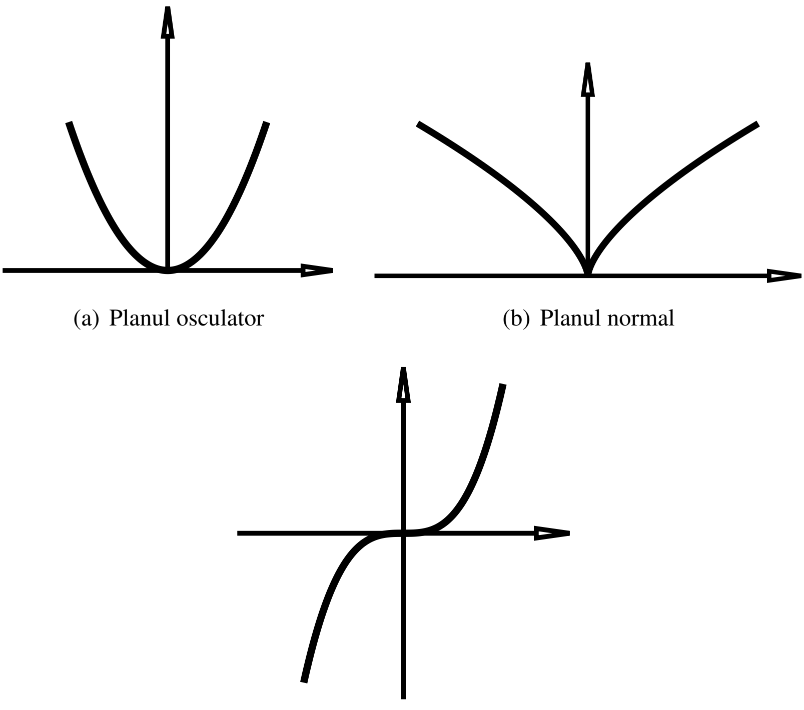
$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}k(0)x^2,\\ z=\frac{1}{6}k(0)\chi(0)x^3,\\ z^2=\frac{2}{9}\frac{\chi^2(0)}{k(0)}y^3.\end{cases} \tag{1.11.10}$$

Astfel, proiecţia curbei pe planul xOy (planul osculator) este o parabolă, proiecţia pe planul xOz (planul rectificant) este o cubică, în timp ce proiecţia pe planul yOz (planul normal) este o parabolă semicubică.

1.12 Contactul dintre o curbă în spaţiu şi un plan

Considerăm o curbă parametrizată natural $(I,\mathbf{r})$. Presupunem, ca şi până acum, că 0 este un punct interior al intervalului I şi că punctul $M_0=\mathbf{r}(0)$ al curbei este biregular. Considerăm o curbă plană Π care trece prin punctul M_0. Alegem ca şi reper de coordonate reperul lui Frenet al curbei $\mathbf{r}$ în punctul M_0, $\mathcal{R}_0=\{M_0;\boldsymbol{\tau}_0,\boldsymbol{\nu}_0,\boldsymbol{\beta}_0\}$. În raport cu acest reper de coordonate, ecuaţia carteziană a planului Π va fi de forma

$$F(x,y,z)\equiv ax+by+cz=0. \tag{1.12.1}$$



(a) Planul osculator

(b) Planul normal

(c) Planul rectificant

Figura 1.8 – Proiecţia unei curbe în spaţiu pe planele reperului lui Frenet

Acum, dacă $x = x(s), y = y(s), z = z(s)$ sunt ecuaţiile locale ale curbei în raport cu reperul lui Frenet (vezi (1.11.9)), condiţia de intersecţie dintre plan şi curbă este $F(x(s), y(s), z(s)) = 0$, adică

$$a\left(s - \frac{1}{6}k^2(0)s^3 + o(s^3)\right) + b\left(\frac{1}{2}k(0)s^2 + \frac{1}{6}k'(0)s^3 + o(s^3)\right) + c\left(\frac{1}{6}k(0)\chi(0)s^3 + o(s^3)\right) = \tag{1.12.2}$$

sau

$$as + \frac{1}{2}bk(0)s^2 + \frac{1}{6}\left(-ak^2(0) + bk'(0) + ck(0)\chi(0)\right)s^3 + o(s^3) = 0. \tag{1.12.3}$$

Avem, acum, mai multe posibilităţi:

a) Dacă $a \neq 0$ (adică planul nu conţine tangenta), atunci planul are un contact de ordinul zero cu curba (intersecţie, ele au un singur punct în comun sau *curba înţeapă planul*).

b) Dacă $a = 0$, atunci ecuaţia de intersecţie are pe $s = 0$ ca soluţie dublă, ceea ce înseamnă că planul are un contact de ordinul 1 cu curba (contact de tangenţă). Se poate obseva imediat că, în acest caz, planul Π trece prin tangenta la curbă în punctul M_0 (ea fiind, în reperul de coordonate considerat de noi, dreapta de ecuaţii $y = 0, z = 0$, adică axa Ox).

c) Dacă vrem un contact de ordin cel puţin 2 (contact de osculaţie), atunci coeficientul lui s^2 din ecuaţia de intersecţie trebuie să se anuleze şi el. Aceasta se poate întâmpla doar dacă $b = 0$ (cum punctul M_0 este biregular, curbura este diferită de zero în acest punct). Astfel, avem contact de osculaţie dacă impunem $a = 0$ and $b = 0$. Dar această alegere ne conduce la ecuaţia $z = 0$ pentru planul Π, adică planul este deja complet determinat (planul osculator).

d) Cum planul Π este complet determinat prin condiţia de a avea un contact de ordinul al doilea cu curba, nu putem acea cazuri şi mai speciale, ca să avem contact de ordin mai înalt (de superosculaţie) Totuşi, dacă examinăm ecuaţia de intersecţie, putem să tragem concluzia că planul osculator are un contact de superosculaţie cu curba în punctele planare ale curbei, adică în punctele în care se anulează torsiunea curbei. În toate celelalte puncte, contactul este doar de ordinul al doilea (osculaţie).

1.13 Contactul dintre o curbă în spaţiu şi o sferă. Sfera osculatoare

Ca şi în paragraful precedent, considerăm o curbă parametrizată natural $(I, \mathbf{r})$, presupunem că 0 este un punct interior al intervalului I şi că $\mathbf{r}(0)$ este un punct biregular al curbei. Alegem ca reper de coordonate reperul lui Frenet al curbei $\mathbf{r}$ în punctul $M_0 = \mathbf{r}(0)$, $\mathcal{R}_0 = \{M_0; \boldsymbol{\tau}_0, \boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\beta}_0\}$. Atunci o sferă arbitrară care trece prin punctul M_0 va avea, în raport cu acest sistem de coordonate, ecuaţia

$$F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz = 0, \tag{1.13.1}$$

unde $\Omega(a, b, c)$ este centrul sferei. Atunci, condiţia de intersecţie va fi, din nou,

$$F(x(s), y(s), z(s)) = 0,$$

unde $x = x(s), y = y(s), z = z(s)$ sunt ecuaţiile locale ale curbei în raport cu reperul lui Frenet în punctul M_0. Astfel, în cazul nostru, avem

$$\begin{aligned} F(x(s), y(s), z(s)) = {} & \left(s - \frac{1}{6}k^2(0)s^3 + o(s^3)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}k(0)s^2 + \frac{1}{6}k'(0)s^3 + o(s^3)\right)^2 + \\ & + \left(\frac{1}{6}k(0)\chi(0)s^3 + o(s^3)\right)^2 - 2a\left(s - \frac{1}{6}k^2(0)s^3 + o(s^3)\right) - \\ & - 2b\left(\frac{1}{2}k(0)s^2 + \frac{1}{6}k'(0)s^3 + o(s^3)\right) - 2c\left(\frac{1}{6}k(0)\chi(0)s^3 + o(s^3)\right) = 0. \end{aligned} \tag{1.13.2}$$

sau

$$-2as + (1 - bk(0))s^2 + \frac{1}{3}(ak^2(0) - bk'(0) - ck(0)\chi(0))s^3 + o(s^3). \tag{1.13.3}$$

Discuţia care urmează este, de asemenea, similară celei din cazul contactului dintre o curbă şi un plan. Totuşi, aici avem mai multe cazuri de luat în considerare.

a) Dacă $a \neq 0$, atunci $s = 0$ este o soluţie simplă a ecuaţiei de intersecţie. Astfel, în acest caz sfera şi curba au un contact de ordinul zero (contact de intersecţie).

b) Sfera şi curba au un contact de ordinul întâi (contact de tangenţă) dacă şi numai dacă ecuaţia de intersecţie are un zerou dublu în origine. Asta se întâmplă, în mod evident, dacă şi numai dacă $a = 0$. Aceasta înseamnă că prima coordonată a centrului sferei este 0, adică acest centru este situat în planul normal la curbă în M_0. Este uşor de constatat că, în acest caz, tangenta la curbă în M_0 este situată în planul tangent la sferă în acelaşi punct, ceea ce justifică, încă o dată, denumirea de *contact de tangenţă*.

c) Pentru un contact de osculaţie (de ordinul al doilea), coeficientul lui s^2 din ecuaţia de intersecţie trebuie să se anuleze şi el şi obţinem

$$b = \frac{1}{k(0)} = R(0), \tag{1.13.4}$$

unde $R(0)$ este raza de curbură a curbei în punctul M_0. Astfel, în acest caz, centrul sferei osculatoare se află pe dreapta de intersecţie a planelor $x = 0$ (planul normal) şi $y = R(0)$. Această dreaptă, care, după cum se constată uşor, este paralelă cu binormala curbei în punctul M_0, se numeşte *axă de curbură* sau *axă polară* a curbei. Ea intersectează planul osculator în M_0 al curbei în centrul de curbură al curbei în M_0. Astfel, orice sferă cu centrul pe axa de curbură a unei curbe are un contact de osculaţie cu aceasta.

d) Vom spune că sfera are un contact de *superosculaţie* cu curba dacă ele au un contact de ordin cel puţin trei, ceea ce înseamnă că în ecuaţia de intersecţie coeficienţii puterilor până la trei ale lui s trebuie să se anuleze simultan. Se afirmă, de obicei, că există o singură sferă care are un contact de superosculaţie cu curba şi această sferă este numită *sfera osculatoare* a curbei în puntul considerat. În realitate, lucrurile sunt ceva mai subtile, după cum vom vedea imediat.

   1) Să presupunem, mai întâi, că torsiunea curbei în punctul M_0 nu se anulează, adică $\chi(0) \neq 0$. În acest caz, se observă imediat că între sferă şi curbă există un contact de superosculţie dacă şi numai dacă avem

$$\begin{cases} a = 0, \\ b = \frac{1}{k(0)}, \\ c = \frac{k'(0)}{k^2(0)\chi(0)}, \end{cases} \tag{1.13.5}$$

   adică în acest caz sfera este unic determinată şi o vom numi *sferă osculatoare*[7].

[7] În unele cărţi, toate sferele care au un contact de osculaţie cu curba se numesc sfere osculatoare, iar cea care un contact de superosculaţie se numeşte *sferă superosculatoare*.

2) Dacă $\chi(0) = 0$, în timp ce $k'(0) \neq 0$, atunci, după cum se poate vedea uşor, coeficientul lui s^3 nu se anulează niciodată, de aceea nu există nici o sferă care să aibă un contact de superosculaţie cu curba. Totuşi, aşa cum am văzut în paragraful precedent, în acest caz planul osculator are un contact de superosculaţie cu curba şi ne putem gândi că planul osculator joacă rolul unei sfere osculatoare, de rază infinită.

3) Dacă atât $\chi(0)$ cât şi $k'(0)$ se anulează, atunci coeficientul lui s^3 în ecuaţia de intersecţie se anulează pentru orice valoare a lui c, cua lte cuvinte, în acest caz, orice sferă care are un contact de osculaţie cu curba are, de asemenea, un contact de superosculaţie. Astfel, în acest caz, avem o *infinitate* de sfere osculatoare.

1.14 Teoreme de existenţă şi unicitate pentru curbe parametrizate

1.14.1 Comportamentul reperului lui Frenet la o deplasare

Definiţia 1.14.1. O *deplasare* a lui $\mathbb{R}^3$ este o aplicaţie $D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $D(x) = \mathcal{A}\cdot x + \mathbf{b}$, unde $\mathcal{A} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ este o matrice ortogonală, $\mathcal{A}^t \cdot \mathcal{A} = I_3$, cu determinantul egal cu unu: $\det \mathcal{A} = 1$, în timp ce $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ este un vector constant. Aplicaţia liniară $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A(x) = \mathcal{A} \cdot x$ se numeşte *partea homogenẽă* a deplasaării.

Observaţii. (i) O deplasare a lui $\mathbb{R}^3$ nu e altceva decât o rotaţie urmată de o translaţie.

(ii) Dacă nu cerem ca $\det \mathcal{A} = 1$, obţinem, de asemenea, o izometrie a lui $\mathbb{R}^3$. Totuşi, în acest caz, (dacă $\det \mathcal{A} = -1$), o transformare $D(x) = \mathcal{A} \cdot x + b$ nu se mai reduce la o rotaţie şi o translaţie, trebuie să mai adăugăm şi o reflexie faţă de un plan. În multe cărţi, termenul "mişcare" implică doar faptul că matricea $\mathcal{A}$ este ortogonală, iar pentru ceea ce numim noi "deplasare" se utilizează termenul de "deplasare proprie".

Definiţia 1.14.2. Fie $D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o deplasare, cu partea omogenă $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. *Imaginea* curbei parametrizate $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ prin D este, prin definiţie, curba parametrizată $(I, \mathbf{r}_1 = (D \circ \mathbf{r})(t))$.

Observaţie. Întrucât A este o aplicaţie liniară nedegenerată, imaginea unei curbe parametrizate regulare este, de asemenea, o curbă parametrizată regulară.

Teorema 1.14.1. *Fie D o deplasare a lui $\mathbb{R}^3$, cu partea omogenă A, $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ – o curbă parametrizată biregulară, $(I, \mathbf{r}_1 = D \circ \mathbf{r})$ – imaginea ei prin D şi $\{\mathbf{r}(t); \boldsymbol{\tau}(t), \boldsymbol{\nu}(t), \boldsymbol{\beta}(t)\}$ – reperul Frenet al curbei parametrizate $\mathbf{r}$ în t. Atunci reperul $\{\mathbf{r}_1(t); A(\boldsymbol{\tau}(t)), A(\boldsymbol{\nu}(t)), A(\boldsymbol{\beta}(t))\}$ este reperul Frenet al lui $\mathbf{r}_1$ în t.*

Demonstraţie. Fie $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $D(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1)$, unde

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + b_1 \\ y_1 = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + b_2 \\ z_1 = \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + b_3 \end{cases} \tag{1.14.1}$$

Atunci

$$\mathbf{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)),$$

deci

$$\mathbf{r}'_1(t) = A(\mathbf{r}'(t)), \quad \mathbf{r}''_1(t) = A(\mathbf{r}''(t)). \tag{1.14.2}$$

Întrucât A este o izometrie liniară care păstrează orientarea lui $\mathbb{R}^3$, avem

$$\begin{gathered} \|\mathbf{r}'_1\| = \|A(\mathbf{r}')\| = \|\mathbf{r}'\|, \ \mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}''_1 = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'', \\ \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}''_1 = A(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''), \ \|\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}''_1\| = \|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|. \end{gathered}$$

Atunci:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_1 &= \frac{\mathbf{r}'_1}{\|\mathbf{r}'\|} = \frac{A(\mathbf{r}')}{\|A(\mathbf{r}')\|} = \frac{A(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}'\|} = A\left(\frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}\right) = A(\boldsymbol{\tau}) \\ \boldsymbol{\nu}_1 &= \frac{\|\mathbf{r}'_1\|}{\|\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}''_1\|}\mathbf{r}''_1 - \frac{\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}''_1}{\|\mathbf{r}'_1\| \cdot \|\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}''_1\|}\mathbf{r}'_1 = \frac{\|\mathbf{r}'\|}{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''} \cdot A(\mathbf{r}'') - \\ &\quad - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}'\| \cdot \|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|} \cdot A(\mathbf{r}') = A(\boldsymbol{\nu}) \\ \boldsymbol{\beta}_1 &= \frac{\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}''_1}{\|\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}''_1\|} = A(\boldsymbol{\beta}). \end{aligned}$$

$\square$

Consecinţă. *Curbele parametrizate $(I, \mathbf{r})$ şi $(I, \mathbf{r}_1 = D \circ \mathbf{r})$ au aceeaşi curbură şi torsiune.*

Demonstraţie. Avem

$$k_1 = \frac{\|\mathbf{r}_1' \times \mathbf{r}_1''\|}{\|\mathbf{r}_1'\|} = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|} = k.$$

Pentru torsiune, situaţia este ceva mai complicată. Ave, din teoremă,

$$\boldsymbol{\beta}_1(t) = A(\boldsymbol{\beta}(t)) \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\nu}_1(t) = A(\boldsymbol{\nu}(t)).$$

A fiind un operator liniar, un rezultat similar este adevărat şi pentru derivatele celor doi vectori Frenet, adică avem

$$\boldsymbol{\beta}'_1(t) = A(\boldsymbol{\beta}'(t)) \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\nu}'_1(t) = A(\boldsymbol{\nu}'(t)).$$

Folosind ultimele ecuaţii Frenet pentru cele două curbe, avem egalităţile

$$-\chi_1(t)\boldsymbol{\nu}_1(t) = A(-\chi_(t)\boldsymbol{\nu}(t)) = -\chi(t)A(\boldsymbol{\nu}(t)) = -\chi(t)\boldsymbol{\nu}_1(t),$$

şi, astfel, cele două torsiuni sunt egale, aşa cum am afirmat. □

1.14.2 Teorema de unicitate

Teorema 1.14.2. *Fie* $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ *şi* $(I, \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t))$ *două curbe parametrizate biregulare. Dacă* $k(t) = k_1(t)$, $\chi(t) = \chi_1(t)$ *şi* $\|\mathbf{r}'(t)\| = \|\mathbf{r}_\mathbf{1}'(t)\|$ $\forall t \in I$, *atunci există o singură deplasare* D *a lui* $\mathbb{R}^3$ *astfel încât* $\mathbf{r}_1 = D \circ \mathbf{r}$.

Demonstraţie. Fie $t_0 \in I$ un punct arbitrar şi D – o deplasare a lui $\mathbb{R}^3$ care duce reperul Frenet $\{\mathbf{r}(t_0); \boldsymbol{\tau}_\mathbf{0}, \boldsymbol{\nu}_\mathbf{0}, \boldsymbol{\beta}_\mathbf{0}\}$ $\mathbf{r}$ în t_0 în reperul Frenet $\{\mathbf{r}_1(t_0); \boldsymbol{\tau}_\mathbf{10}, \boldsymbol{\nu}_\mathbf{10}, \boldsymbol{\beta}_\mathbf{10}\}$ al curbei $\mathbf{r}_1$ în acelaşi punct. Evident, există o singură deplasare cu această proprietate. Fie $(I, \mathbf{r}_2(t{=}D \circ \mathbf{r}(t))$ – imaginea curbei $\mathbf{r}$ prin D, şi k_2, χ_2 – curbura, respectiv torsiunea curbei parametrizate $\mathbf{r}_2$. Atunci

$$k_2(t) \equiv k(t) \equiv k_1(t)$$

$$\chi_2(t) \equiv \chi(t) \equiv \chi_1(t)$$

şi, în plus,

$$\|\mathbf{r}_\mathbf{2}'(t)\| \equiv \|\mathbf{r}_\mathbf{1}'(t)\|.$$

De aceea, funcţiile vectoriale $\boldsymbol{\tau}_1(t)$, $\boldsymbol{\nu}_1(t)$, $\boldsymbol{\beta}_1(t)$ şi $\boldsymbol{\tau}_2(t)$, $\boldsymbol{\nu}_2(t)$, $\boldsymbol{\beta}_2(t)$ care ne dau reperul lui Frenet sunt soluţii ale aceluiaşi sistem de ecuaţii Frenet

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}' = \|\mathbf{r}_1'\| k_1 \boldsymbol{\nu} \\ \boldsymbol{\nu}' = -\|\mathbf{r}_1'\| k_1 \boldsymbol{\tau} + \|\mathbf{r}_1'\| \chi_1 \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}' = -\|\mathbf{r}_1'\| \chi_1 \boldsymbol{\nu}. \end{cases}$$

Întrucât pentru $t = t_0$ soluţiile coincid, din unicitatea soluţiei problemei Cauchy coincid, ele trebuie să coincidă global. În particular, avem

$$\boldsymbol{\tau}_1(t) \equiv \boldsymbol{\tau}_2(t) \quad \text{or} \quad \frac{\mathbf{r}_1'(t)}{\|\mathbf{r}_1'(t)\|} = \frac{\mathbf{r}_2'(t)}{\|\mathbf{r}_2'(t)\|},$$

deci

$$\mathbf{r}_1'(t) - \mathbf{r}_2'(t) = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t) = \text{const.}$$

Dar pentru $t = t_0$, $\mathbf{r}_1(t_0) - \mathbf{r}_2(t_0) = 0$, deci cele două funcţii coincid pentru orice valoare a lui t, prin urmare $\mathbf{r}_1(t) \equiv \mathbf{r}_2(t) = D \circ \mathbf{r}(t)$.

Cât despre unicitatea lui of D, remarcăm că pentru orice alt punct $t_1 \in I$, cum $\mathbf{r}_1 \equiv \mathbf{r}_2$, D trimite reperul lui Frenet al curbei $\mathbf{r}$ în t_1 în reperul lui Frenet al curbei $\mathbf{r}_1$ în t_1. □

Observaţie. Pentru curbe parametrizate natural, condiţia $\|\mathbf{r}'(t)\| = \|\mathbf{r}_1'(t)\|$ este îndeplinită întotdeauna.

1.14.3 Teorema de existenţă

Teorema 1.14.3. *Fie $f(s)$ şi $g(s)$ două funcţii netede, definite pe un interval I, astfel încât $f(s) > 0$, $\forall t \in I$. Atunci există o curbă parametrizată natural $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(s))$ pentru care $f(s) = k(s)$ $\forall s \in I$ şi $g(s) = \chi(s)$ $\forall s \in I$. Această curbă este unic definită, până la o deplasare a lui $\mathbb{R}^3$.*

Demonstraţie. Fie $\{\mathbf{r}_0; \mathbf{T}_0, \mathbf{N}_0, \mathbf{B}_0\}$ un reper ortonormat drept în $\mathbb{R}^3$. Considerăm sistemul de ecuaţii diferenţiale liniare

$$\begin{cases} \mathbf{T}'(s) = f(s)\mathbf{N}(s) \\ \mathbf{N}'(s) = -f(s)\mathbf{T}(s) + g(s)\mathbf{B}(s) \\ \mathbf{B}'(s) = -g(s)\mathbf{N}(s) \end{cases} \tag{1.14.3}$$

în raport cu funcţiile vectoriale $\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)$.

Dacă notăm

$$X(s) = (\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)), \tag{1.14.4}$$

atunci sistemul (1.14.3) se poate scrie ca

$$X'(s) = A(s) \cdot X(s), \tag{1.14.5}$$

cu

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & f(s) & 0 \\ -f(s) & 0 & g(s) \\ 0 & -g(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

În teoria ecuaţiilor diferenţiale ordinare se demonstrează că sistemul (1.14.5) are o singură soluţie care verifică

$$X(s_0) = (\mathbf{T_0}, \mathbf{N_0}, \mathbf{B_0}),$$

unde $s_0 \in I$, în timp ce coloanele matricei $X(s_0)$ sunt vectorii $\mathbf{T_0}, \mathbf{N_0}, \mathbf{B_0}$ ai bazei ortonormate iniţiale.

Vom demonstra, mai întâi, că pentru orice $s \in I$ vectorii din $(\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s))$ formează o bază ortonormată. Este suficient să demonstrăm că, pentru orice $s \in I$, $X(s)$ este ortogonală, adică $X^t(s) \cdot X(s) = I_3$. Avem

$$\frac{d}{dt}\left(X^t \cdot X\right) = \frac{d}{dt}\left(X^t(s)\right) \cdot X + X^t \cdot \frac{d}{dt}\left(X(s)\right) = X^t(A^t X + AX) = X^t(A^t + A)X.$$

dar, cum A este antisimetrică, $A^t + A = 0$, de aceea

$$\frac{d}{dt}\left(X^t \cdot X\right) = 0 \Rightarrow X^t \cdot X = const.$$

Pe de altă parte, din condiţia iniţială, $\left(X^t \cdot X\right)(s_0) = I_3$, deci $X^t(s) \cdot X(s) = I_3$ pentru orice $s \in I$.

Să definim acum

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \int_{s_0}^{s} \mathbf{T}(s) ds, \tag{sol}$$

unde $\mathbf{r}_0$ este originea reperului ini ţial, în timp ce $\mathbf{T}(s)$ este prima coloană a lui $X(s)$. Vom arăta că $(I, \mathbf{r}(s))$ este curba căutată. Avem, în mod clar:

$$\mathbf{r}'(s) = \mathbf{T}(s),$$
$$\|\mathbf{r}'(s)\| = \|\mathbf{T}(s)\| = 1,$$
$$\mathbf{r}''(s) = \mathbf{T}'(s) = f(s)\mathbf{N}(s).$$

Remarcăm imediat că $\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s) \neq 0$, de aceea $\mathbf{r}(s)$ este o curbă biregulară, parametrizată natural. Pe de altă parte,

$$\mathbf{r}'''(s) = (f(s)\mathbf{N})' = f'\mathbf{N} + f\mathbf{N}' = f'\mathbf{N} + f(-f\mathbf{T} + g\mathbf{B}) = -f^2\mathbf{T} + f'\mathbf{N} + fg\mathbf{B},$$

deci

$$(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') = (\mathbf{T}, f\mathbf{N}, -f^2\mathbf{T} + f'\mathbf{N} + fg\mathbf{B}) = (\mathbf{T}, f\mathbf{N}, fg\mathbf{B}) = f^2 g \underbrace{(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})}_{=1} = f^2 g.$$

Tot ce mai rămâne de făcut este să calculăm curbura şi torsiunea:

$$k(s) = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3} = |f(s)| = f(s),$$
$$\chi(s) = \frac{f^2(s)g(s)}{f^2(s)} = g(s),$$

deci curba $\mathbf{r}$ îndeplineşte condiţiile teoremei.

Unicitatea lui $\mathbf{r}$, până la o deplasare, rezultă din teorema precedentă. $\square$

Curbe plane | 2

2.1 Introducere

După ce am expus teoria curbelor în spaţiu în toată generalitatea, ne vom focaliza în acest capitol asupra unor subiecte care sunt specifice teoriei curbelor plane. În particular, vom discuta aici noţiuni care nu pot fi definite pentru curbe în spaţiu (cum ar fi curbura cu semn), sau care sunt mai uşor de investigat în contextul curbelor plane.

2.2 Înfăşurători de curbe plane

În această secţiune, dacă nu se menţionează altfel, toate curbele sunt *curbe parametrizate*. Fie

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \lambda) \tag{2.2.1}$$

o familie de curbe parametrizate care depind neted de parametrul λ.

Definiţie. *Înfăşurătoarea* familiei (2.2.1) este o curbă parametrizată (J, Γ) care, în fiecare punct al său, este tangentă unei curbe din familie.

Teoremă. *Punctele înfăşurătorii familiei* $\mathbf{r}(t, \lambda)$ *verifică*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \lambda) \tag{2.2.2}$$
$$\mathbf{r}_{\boldsymbol{\lambda}}' \times \mathbf{r}_{\boldsymbol{t}}' = 0. \tag{2.2.3}$$

Demonstraţie. Dacă Γ este înfăşurătoarea familiei (γ_λ), iar P este un punct al lui Γ, atunci P este un punct de tangenţă între Γ şi o curbă din familie, corespunzătoare unei valori a parametrului λ. Astfel, ecuaţia lui Γ va fi de forma

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(\lambda).$$

Pe de altă parte, P este pe una dintre curbele γ_λ şi, de aceea, verifică

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t(\lambda), \lambda).$$

Condiţia de tangenţă dintre Γ şi γ_λ se scrie

$$\mathbf{r}'_{1\boldsymbol{\lambda}} \parallel \mathbf{r}'_{\boldsymbol{t}}$$

sau

$$\mathbf{r}'_{1\boldsymbol{\lambda}} \times \mathbf{r}'_{\boldsymbol{t}} = 0$$

sau, încă, întrucât $\mathbf{r}'_{1\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{r}'_{\boldsymbol{t}} \cdot t'_\lambda + \mathbf{r}'_{\boldsymbol{\lambda}}$,

$$(\mathbf{r}'_{\boldsymbol{t}} \cdot t'_\lambda + \mathbf{r}'_{\boldsymbol{\lambda}}) \times \mathbf{r}'_{\boldsymbol{t}} = 0,$$

şi teorema este demonstrată, deoarece $\mathbf{r}'_{\boldsymbol{t}} \times \mathbf{r}'_{\boldsymbol{t}} = 0$. □

Observaţii. 1. Mulţimea de puncte descrisă de ecuaţiile (2.2.2) şi (2.2.3) se numeşte *mulţime discriminant* a familiei γ_λ. Ea conţine nu doar suportul înfăşurătorii, ci şi punctele singulare ale curbelor din familie, pentru care $\mathbf{r}'_{\boldsymbol{t}} = 0$, deci nu există tangentă.

2. Ecuaţia $\mathbf{r}'_{\boldsymbol{\lambda}} \times \mathbf{r}'_{\boldsymbol{t}} = 0$ se poate scrie şi ca

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'_\lambda & y'_\lambda & 0 \\ x'_t & y'_t & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x'_\lambda y'_t - x'_t y'_\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x'_\lambda}{x'_t} = \frac{y'_\lambda}{y'_t}. \tag{2.2.4}$$

Exemplu. Să considerăm familia de curbe

$$\mathbf{r}(t, \lambda) = (\lambda + a\cos t, \lambda + a\sin t), \qquad \lambda, t \in \mathbb{R}, a > 0.$$

În mod clar, avem de-a face cu o famile de cercuri de rază a, cu centrele pe prima bisectoare a axelor de coordonate. Atunci, avem

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'{}_\lambda &= \{1, 1\}, \\ \mathbf{r}'{}_t &= \{-a\sin t, a\cos t\}, \end{aligned}$$

de aceea, punctele înfăşurătorii (şi numai ele, întrucât cercurile nu au puncte singulare) verifică

$$\begin{cases} x = \lambda + a\cos t \\ y = \lambda + a\sin t \\ x'_\lambda \cdot y'_t = x'_t \cdot y'_\lambda \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x = \lambda + a\cos t \\ y = \lambda + a\sin t \\ a\cos t = -a\sin t. \end{cases}$$

Eliminând t, obţinem ecuaţiile parametrice ale înfăşurătorii:

$$\begin{cases} x(\lambda) = \lambda \pm \frac{a}{\sqrt{2}} \\ y(\lambda) = \lambda \mp \frac{a}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

adică înfăşurătoarea este, în fapt, o pereche de drepte paralele cu prima bisectoare a axelor de coordonate.

2.2.1 Curbe date printr-o ecuaţie implicită

Propoziţia 2.2.1. *Punctele înfăşurătorii unei familii de curbe plane dată prin ecuaţia implicită*

$$F(x, y, \lambda) = 0 \tag{2.2.5}$$

verifică sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} F(x, y, \lambda) = 0 \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \tag{2.2.6}$$

Demonstraţie. Local, în jurul fiecărui punct al unei curbe din familie, putem parametriza curba, adică o putem reprezenta sub forma

$$\begin{cases} x = x(t, \lambda) \\ y = y(t, \lambda) \end{cases} .$$

Înlocuind în ecuaţia familiei, obţinem

$$F(x(t, \lambda), y(t, \lambda), \lambda) = 0,$$

de unde, derivând în raport cu t, respectiv λ, obţinem sistemul:

$$\begin{cases} F'_x x'_t + F'_y y'_t = 0 \\ F'_x x'_\lambda + F'_y y'_\lambda + F'_\lambda = 0 \end{cases}.$$

Dar, din (2.2.4),

$$x'_\lambda = K x'_t, \quad y'_\lambda = K y'_t,$$

cu $K =$ const., de aceea, a doua ecuaţie de mai sus devine

$$K(\underbrace{F'_x x'_t + F'_y y'_t}_{=0}) + F'_\lambda = 0$$

sau

$$F'_\lambda = 0.$$

$\square$

Exemplu. Considerăm, din nou, famila de cercuri din paragraful precedent, de data aceasta dată prin ecuaţia implicită

$$F(x, y, \lambda) \equiv (x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 - a^2 = 0.$$

Atunci, a doua ecuaţie a mulţimii discriminant va fi

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = -2(x + y - 2\lambda) = 0,$$

de unde obţinem

$$\lambda = \frac{x + y}{2},$$

ceea ce, după înlocuirea în ecuaţia familiei, ne dă

$$(x - y)^2 = 2a^2,$$

adică obţinem, din nou, aceleaşi ecuaţii ale înfăşurătorii, adică

$$y = x \pm a\sqrt{2}.$$

2.2.2 Familii de curbe care depind de doi parametri

Propoziţia 2.2.2. *Să presupunem că ni se dă o familie de curbe care depinde neted de doi parametri, λ şi μ*

$$F(x, y, \lambda, \mu) = 0, \tag{2.2.7}$$

unde parametrii λ şi μ sunt legaţi printr-o relaţie

$$\varphi(\lambda, \mu) = 0, \tag{2.2.8}$$

atunci punctele înfăşurătorii verifică sistemul

$$\begin{cases} F(x, y, \lambda, \mu) = 0 \\ \varphi(\lambda, \mu) = 0 \\ \dfrac{D(F, \varphi)}{D(\lambda, \mu)} = 0 \end{cases} . \tag{2.2.9}$$

Demonstraţie. Din ecuaţia

$$\varphi(\lambda, \mu) = 0,$$

putem presupune, de exemplu, că

$$\mu = \mu(\lambda),$$

de aceea, înlocuind în F şi φ,

$$\begin{cases} F(x, y, \lambda, \mu(\lambda)) = 0, \\ \varphi(\lambda, \mu(\lambda)) = 0. \end{cases}$$

Derivând în raport cu λ aceste două ecuaţii, obţinem:

$$\begin{cases} F'_\lambda + F'_\mu \mu'_\lambda = 0 \\ \varphi'_\lambda + \varphi'_\mu \mu'_\lambda = 0. \end{cases}$$

Eliminând derivata μ'_λ între cele două ecuaţii, obţinem a treia ecuaţie din (2.2.9), după cum se cerea. □

2.2.3 Aplicaţie: evoluta unei curbe plane

Definiţie. Fie $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ o curbă parametrizată plană. *Evoluta* lui $\mathbf{r}$ este, prin definiţie, înfăşurătoarea familiei de normale la curbă.

Avem următorul rezultat:

Propoziţia 2.2.3. *Ecuaţiile parametrice ale evolutei curbei* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ *sunt*

$$\begin{cases} X = x - \dfrac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'} \\ Y = y + \dfrac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'} \end{cases} \tag{2.2.10}$$

Demonstraţie. După cum se ştie, ecuaţia normalei la o curbă plană este

$$F(X, Y, t) = (X - x(t)) \cdot x'(t) + (Y - y(t)) \cdot y'(t) = 0.$$

Relaţiile verificate de punctele înfăşurătorii familiei de normale (şi *numai* de ele, deoarece, în acest caz, curbele din familie sunt drepte, deci nu au puncte singulare) sunt (vezi (2.2.6)):

$$\begin{cases} F(X, Y, t) = 0 \\ F'_t(X, Y, t) = 0 \end{cases},$$

adică

$$\begin{cases} x'(t)X + y'(t)Y = x(t) \cdot x'(t) + y(t) \cdot y'(t) \\ x''(t)X + y''(t)Y = x'^2(t) + x''(t) \cdot x(t) + y'^2(t) + y(t) \cdot y''(t) \end{cases}.$$

Ecuaţiile (2.2.10) rezultă acum imediat, rezolvând acest sistem de ecuaţii liniare în raport cu X şi Y. □

Exemplu. Pentru elipsă

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

obţinem, după calcule,

$$\begin{cases} X = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t \\ Y = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t \end{cases}$$

sau, după eliminarea parametrului t,

$$a^{\frac{2}{3}}X^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}Y^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Curba descrisă de această ecuaţie se numeşte *astroidă alungită* (vezi figura **??**).

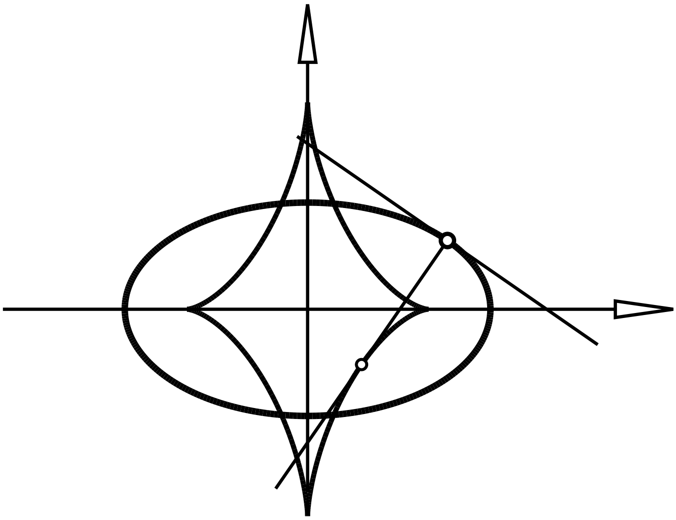


Figura 2.1 – Evoluta unei elipse

2.3 Curbura unei curbe plane

După cum am văzut, în cazul unei curbe în spaţiu oarecare, curbura este întotdeauna un scalar pozitiv. Desigur, acest concept de curbură se poate aplica, în egală măsură, şi curbelor plane. Se dovedeşte, totuşi, că în acest caz particular, putem obţine mai multe informaţii despre curbă dacă folosim o noţiune de curbură uşor diferită, permiţând curburii să aibă un semn. Pentru a defini curbura unei curbe plane vom folosi un truc tehnic, care ne va permite să construim definiţia într-un mod independent de coordonate.

Definiţie. Se numeşte *structură complexă* pe $\mathbb{R}^2$ aplicaţia $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definită prin

$$J(x, y) = (-y, x).$$

Observaţie. A aplica J înseamnă, pur şi simplu, a roti vectorul $\{x, y\}$ cu $\frac{\pi}{2}$ sau a înmulţi numărul complex $x + iy$ cu unitatea imaginară i (de aici provine, de fapt, numele).

Câteva proprietăţi evidente ale structurii complexe sunt conţinute în următoarea propoziţie:

Propoziţia 2.3.1. *a)* $J\mathbf{v} \cdot J\mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.

b) $(J\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$.

c) $J(J\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ *(adică* $J^2 = -id$*).*

Toate aceste proprietăţi rezultă imediat din interpretarea geometrică a structurii complexe.

Anticipând puţin, vom spune câteva cuvinte despre genul de curbură pe care îl vom defini. Ne amintim că curbura unei curbe parametrizate în spaţiu $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ oarecare se poate calcula cu formula

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}.$$

Acum, dacă $\mathbf{r}$ este o curbă *plană*, cu suportul situat în planul de coordonate xOy, atunci vectorii $\mathbf{r}'(t)$ şi $\mathbf{r}''(t)$ sunt situaţi, de asemenea, în acest plan. De aceea, produsul lor vectorial este un vector direcţionat de-a lungul axei z şi, prin urmare, norma vectorului este, pur şi simplu, valoarea absolută a componentei pe axa z. Ideea definiţiei curburii cu semn este să înlocuim valoarea absolută cu componenta însăşi. În acest scop, următoarea caracterizare a produsului vectorial a doi vectori din planul xOy se va dovedi foarte utilă.

Propoziţia 2.3.2. *Fie* $\mathbf{u}(x_1, y_1), \mathbf{v}(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. *Atunci*

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = [\mathbf{v} \cdot J\mathbf{u}] \cdot \mathbf{k}.$$

Demonstraţie. După cum se ştie, produsul vectorial al vectorilor $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$ (priviţi ca vectori în $\mathbb{R}^3$, cu ultima componentă nulă) poate fi calculat cu formula

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = (x_1 y_2 - x_2 y_1) \cdot \mathbf{k}.$$

Pe de altă parte,

$$\mathbf{v} \cdot J\mathbf{u} = \{x_2, y_2\} \cdot \{-y_1, x_1\} = -x_2 y_1 + x_1 y_2,$$

de unde rezultă egalitatea anunţată. □

Suntem, acum, gata să definim curbura unei curbe plane.

Definiţie. Fie $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ o curbă parametrizată plană. *Curbura cu semn* a lui $\mathbf{r}$ este, prin definiţie, cantitatea

$$k_{\pm} = \frac{\mathbf{r}'' \cdot J\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|^3}. \tag{2.3.1}$$

Observaţie. Conform propoziţiei 2.3.2, curbura cu semn este proiecţia vectorului de curbură pe axa z. Cum vectorul de curbură este paralel cu axa z, avem

$$|k_{\pm}| = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3} = k.$$

Alt rezultat imediat, dar important din punctul de vedere al calculului este următorul:

Propoziţia 2.3.3. *Fie $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ o curbă parametrizată plană. Dacă $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, atunci curbura cu semn a lui $\mathbf{r}$ poate fi exprimată ca*

$$k_{\pm}(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left(x'^2(t) + y'^2(t)\right)^{3/2}}.$$

Consecinţă. *Dacă $y = f(x)$ este ecuaţia explicită a unei curbe plane, atunci curbura sa cu semn este dată de*

$$k_{\pm}(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'^2)^{3/2}}.$$

Observaţie. Consecinţa precedentă arată că pentru o curbă plană dată explicit (adică graficul unei funcţii de o singură variabilă) semnul curburii cu semn este, de fapt, semnul derivatei a doua a funcţiei f, adică, după cum se ştie din analiză, semnul curburii cu semn este o indicaţie a convexităţii sau a concavităţii funcţiei.

Exact aşa cum se întâmplă cu torsiunea unei curbe în spaţiu, curbura cu semn a unei curbe plane este "aproape" invariantă faţă de o schimbare de parametru, adică avem

Teoremă. *Fie* $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ *o curbă parametrizată plană,* $(J, \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(u))$ *– o curbă parametrizată echivalentă cu ea, cu schimbarea de parametru* $\lambda : I \to J$*,* $u = \lambda(t)$*. Atunci*

$$k_{\pm}[\boldsymbol{\rho}](u) = \operatorname{sgn}(\lambda') \cdot k_{\pm}[\mathbf{r}](t).$$

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= \boldsymbol{\rho}(\lambda(t)) \\
\mathbf{r}'(t) &= \boldsymbol{\rho}'(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t) \\
\mathbf{r}''(t) &= \boldsymbol{\rho}''(\lambda(t)) \cdot \lambda'^2(t) + \boldsymbol{\rho}'(\lambda(t)) \cdot \lambda''(t) \\
\mathbf{r}'' \cdot J\boldsymbol{\rho}' &= (\boldsymbol{\rho}''\lambda'^2 + \boldsymbol{\rho}'\lambda''\cdot J(\lambda'\boldsymbol{\rho}') = \\
&= \lambda'^3\boldsymbol{\rho}'' \cdot J\boldsymbol{\rho}' + \lambda'\lambda'' \underbrace{\boldsymbol{\rho}' \cdot J\boldsymbol{\rho}'} = 0 = \lambda'^3\boldsymbol{\rho}'' \cdot J\boldsymbol{\rho}' \\
\|\mathbf{r}'\|^3 &= |\lambda'^3|\|\boldsymbol{\rho}'\|^3
\end{aligned}$$

de aceea

$$k_{\pm}[\mathbf{r}](t) = \frac{\mathbf{r}'' \cdot J\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|^3} = \frac{\lambda'^3}{|\lambda'^3|} \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}''(u) \cdot J\boldsymbol{\rho}'(u)}{\|\boldsymbol{\rho}'(u)\|^3} = \operatorname{sgn}(\lambda') \cdot k_{\pm}[\boldsymbol{\rho}](u),$$

de unde

$$k_{\pm}[\boldsymbol{\rho}](u) = \operatorname{sgn}(\lambda') \cdot k_{\pm}[\mathbf{r}](t).$$

$\square$

Observaţie. Teorema precedentă arată că curbura cu semn este invariantă faţă de orice schimbare de parametru *pozitivă*, de aceea are sens să o definim şi pentru curbe plane regulare *orientate*.

Vectorul de curbură al unei curbe plane parametrizate natural poatre fi exprimat uşor în funcţie de curbura cu semn:

Lemă. *Fie* $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(s))$ *o curbă plană parametrizată natural. Atunci*

$$\mathbf{r}''(s) = k_{\pm}(s) \cdot J\mathbf{r}'(s).$$

Demonstraţie. Avem $\mathbf{r}'^2(s) = 1$ (curba este parametrizată natural), de aceea $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' = 0$, de unde rezultă că $\mathbf{r}'' \perp \mathbf{r}'$ sau, ceea ce este acelaşi lucru, $\mathbf{r}'' \parallel J\mathbf{r}'$.

Pe de altă parte, din definiţia curburii cu semn, $k_{\pm}(s) = \mathbf{r}''(s) \cdot J\mathbf{r}'(s)$. Dacă punem $\mathbf{r}''(s) = \alpha(s) \cdot J\mathbf{r}'(s)$, atunci trebuie să avem $\mathbf{r}''(s) \cdot J\mathbf{r}'(s) = \alpha(s) \cdot [J\mathbf{r}'(s)]^2 = \alpha(s)$, de unde $\alpha(s) = k_{\pm}(s)$. $\square$

2.3.1 Semnificaţia geometrică a curburii cu semn

Pentru curbura cu semn a unei curbe plane avem o interpretare geometrică similară cu interpretarea geometrică a curburii unei curbe în spaţiu, doar că, de data asta, se ia în considerare şi semnul. Avem nevoie, mai întâi, de următoarea definiţie.

Definiţie. Fie $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ o curbă parametrizată plană. *Unghiul de rotaţie* al lui $\mathbf{r}$ este funcţia $\theta[\mathbf{r}] : I \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \{\cos\theta[\mathbf{r}](t), \sin\theta[\mathbf{r}](t)\} = \exp(i\theta[\mathbf{r}](t)), \tag{2.3.2}$$

unde $\boldsymbol{\tau}(t)$ este versorul tangentei, adică $\theta[\mathbf{r}]$ este unghiul dintre versorul tangentei şi direcţia pozitivă a axei Ox.

Observaţie. Această definiţie pare foarte inocentă şi naturală. La urma urmei, ar trebui să fie clar pentru oricine că θ este chiar unghiul format de versorul tangentei cu direcţia pozitivă a axei x. În realitate, totuşi, pentru o curbă plană arbitrară, nu este deloc evident că se poate găsi o funcţie unghi *continuă*, ca să nu mai vorbim de una netedă. Astfel de funcţii *există* (vezi, de exemplu, cartea lui Bär [1], pentru o demonstraţie modernă) şi orice două astfel de funcţii diferă printr-un multiplu întreg de 2π.

Următoarea lemă furnizează legătura dintre curbura cu semn şi variaţia unghiului de rotaţie. Conţinutul acestei leme este destul de asemănător interpretării geometrice a curburii unei curbe în spaţiu. De fapt, când curba plană este privită ca un caz particular al unei curbe în spaţiu, variaţia unghiului de rotaţie este egală (ca valoare absolută) cu variaţia unghiului de contingenţă, de aceea, în realitate, interpretarea geometrică a curburii *absolute* a unei curbe plane (privită ca o curbă în spaţiu) este un caz particular al acestei leme.

Lemă. *Dacă $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ este o curbă parametrizată plană, θ este unghiul său de rotaţie, iar $k_\pm$ – curbura sa cu semn, atunci:*

$$\frac{d\theta}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\| k_\pm(t).$$

Demonstraţie. Din definiţia versorului tangentei avem $\boldsymbol{\tau}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$, de unde

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{\mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} + \mathbf{r}'(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\right).$$

Pe de altă parte, dacă folosim expresia lui $\boldsymbol{\tau}(t)$ ca funcţie de unghiul θ, dat de (2.3.2), obţinem pentru $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$ formula

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\{-\sin\theta(t), \cos\theta(t)\} = \frac{d\theta}{dt} J\boldsymbol{\tau}(t).$$

Combinând cele două relaţii, obţinem egalitatea

$$\frac{\mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} + \mathbf{r}'(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\right) = \frac{d\theta}{dt} J\boldsymbol{\tau}(t) \equiv \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{J\mathbf{r}''(t)}{\|J\mathbf{r}'(t)\|}.$$

Înmulţind scalar ambii membrii cu $J\mathbf{r}'(t)$ şi ţinând cont de faptul că $J\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}'(t) = 0$ şi $J\mathbf{r}'(t)\cdot J\mathbf{r}'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|^2$, obţinem:

$$\frac{\mathbf{r}''(t)\cdot J\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{d\theta}{dt}\cdot\|\mathbf{r}'(t)\|,$$

de unde, folosind definiţia curburii cu semn, rezultă că

$$\frac{d\theta}{dt}\cdot\|\mathbf{r}'(t)\| = k_{\pm}(t)\cdot\|\mathbf{r}'(t)\|^2$$

sau, după simplificare,

$$\frac{d\theta}{dt} = k_{\pm}(t)\cdot\|\mathbf{r}'(t)\|,$$

adică ceea ce trebuia demonstrat. □

Corolar. *Pentru o curbă parametrizată natural,* $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(s))$, *avem*

$$k_{\pm}(s) = \frac{d\theta}{ds}.$$

Observaţie. Din formula precedentă obţinem

$$k \equiv \|k_{\pm}\| = \left|\frac{d\theta}{ds}\right|,$$

ceea ce este exact formula pentru curbura curbura unei curbe în spaţiu oarecare care, astfel, rămâne validă, după cum ne aşteptam, pentru cazul particular al curbelor plane.

2.4 Centrul de curbură. Evoluta şi evolventa unei curbe plane

Definiţie. Un punct $\Omega \in \mathbb{R}^2$ se numeşte *centru de curbură* în $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ al unei curbe parametrizate planec $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^2$ dacă există un cerc (γ), cu centrul în Ω, care este tangent curbei în $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$, cu $t_0 \in I$, astfel încât curburile cu semn ale lui $\mathbf{r}$ şi γ în $\mathbf{r}_0$ să coincidă, de unede rezultă poziţia lui Ω pentru un $t \in I$ arbitrar:

$$\Omega(t) = \mathbf{r}(t) + \frac{1}{k_\pm(t)} \frac{J\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}.$$

Observaţie. Noţiunea de centru de curbură este invariantă relativ la o schimbare de parametru: dacă $(J, \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(u))$ este echivalentă cu $\mathbf{r}$, cu schimbarea de parametru $\lambda : I \to J$, atunci $\mathbf{r}'(t) = \boldsymbol{\rho}'(\lambda(t))\lambda'(t)$, iar $k_\pm[\mathbf{r}](t) = \operatorname{sgn}(\lambda')k_\pm[\boldsymbol{\rho}](\lambda(t))$. În mod evident, putem avea probleme doar când $\lambda' < 0$, dar în acest caz $J\mathbf{r}'$ îşi schimbă sensul, iar $k_\pm$ îşi schimbă semnul, aşa că, pe ansamblu, situaţia rămâne neschimbată.

Am definit evoluta unei curbe plane ca fiind înfăşurătoarea familiei normalelor la curbă. Următoarea teoremă furnizează o abordare alternativă.

Propoziţia 2.4.1. *Evoluta unei curbe plane este locul geometric al centrelor de curbură ale curbei.*

Demonstraţie. Centrul de curbură al unei curbe pentru o valoare arbitrară a parametrului este

$$\Omega(t) = \mathbf{r}(t) + \frac{\|\mathbf{r}'(t)\|^2}{\mathbf{r}''(t) \cdot J\mathbf{r}'(t)} \cdot J\mathbf{r}'(t) = (x(t), y(t)) + \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}\{-y', x'\}.$$

Astfel, dacă $\Omega(t) = (X(t), Y(t))$, proiectând ecuaţia precedentă pe axele de coordonate, obţinem ecuaţiile parametrice ale locului geometric descris de centrele de curbură:

$$\begin{cases} X(t) = x(t) - \dfrac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}, \\ Y(t) = y(t) + \dfrac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}, \end{cases}$$

care sunt tocmai ecuaţiile evolutei. $\square$

Din observaţia precedentă deducem imediat:

Corolar. *Definiţia evolutei are sens şi pentru curbe regulare (cu alte cuvinte, două curbe parametrizate echivalente au aceeaşi evolută).*

Exerciţiul 2.4.1. Determinaţi evoluta astroidei

$$\begin{cases} x(t) = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$$

Demonstraţi că evoluta unei astroide este tot o astroidă (vezi figura 2.2).

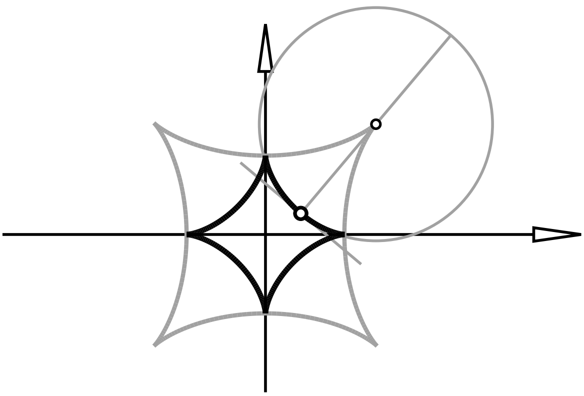


Figura 2.2 – Evoluta unei astroide

Exerciţiul 2.4.2. Determinaţi evoluta unei cicloide

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Demonstraţi că evoluta este tot o cicloidă (vezi figura 2.3).

O altă curbă plană interesantă asociată unei curbe plane date este aşa-numita *evolventă*, care este, aşa cum vom vedea imediat, într-un sens, inversa evolutei.

Definiţie. Fie $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(s))$ o curbă parametrizată natural şi $c \in I$. *Evolventa* lui $\mathbf{r}$ cu originea în $\mathbf{r}(c)$ (sau, mai pe scurt, în c) este curba parametrizată $(I, \boldsymbol{\rho}[\mathbf{r}, c] = \boldsymbol{\rho}[\mathbf{r}, c](s))$, unde

$$\boldsymbol{\rho}[\mathbf{r}, c](s) = \mathbf{r}(s) + (c - s)\mathbf{r}'(s).$$

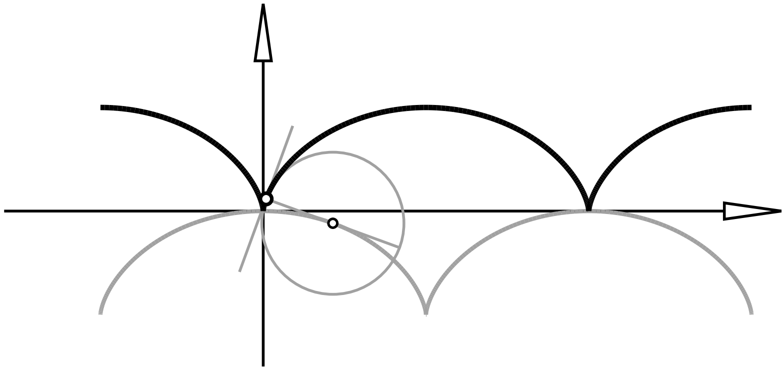


Figura 2.3 – Evoluta unei cicloide

Observaţie. În general, s *nu* este parametru natural de-a lungul curbei $\boldsymbol{\rho}$.

Dacă $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ este o curbă parametrizată oarecare, putem înlocui parametrul t cu lungimea arcului $s = \int_0^t \|\mathbf{r}'(\tau)\| d\tau$ şi defini evolventa lui $\mathbf{r}$ ca fiind evolventa curbei parametrizate natural echivalentă cu ea, parametrul natural fiind lungimea arcului. Este uşor de constatat că are loc următoarea propoziţie:

Propoziţia 2.4.2. *Fie $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ o curbă parametrizată. Evolventa lui $\mathbf{r}$ cu originea în $c \in I$ este dată de*

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{r}(t) + (c - s(t))\frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|},$$

unde $s = s(t)$ este lungimea arcului lui $\mathbf{r}$.

Exemplu. Fie $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t)$ un cerc. Atunci

$$\begin{cases} \mathbf{r}'(t) = \{-a\sin t, a\cos t\} \\ x'^2 + y'^2 = a^2 \\ s(t) = \int_0^t a\,dt = at, \end{cases}$$

deci ecuaţia evolventei este

$$\boldsymbol{\rho}(t) = (a\cos t, a\sin t) + \frac{(c - at)}{a}\{-a\sin t, a\cos t\}$$

sau, în proiecţie pe axe,

$$\begin{cases} X(t) = a\cos t - (c - at)\sin t \\ Y(t) = a\sin t + (c - at)\cos t \end{cases}.$$

Am reprezentat, în figura **??** o evolventă a cercului de rază 1.5, cu originea în punctul de parametru 0.

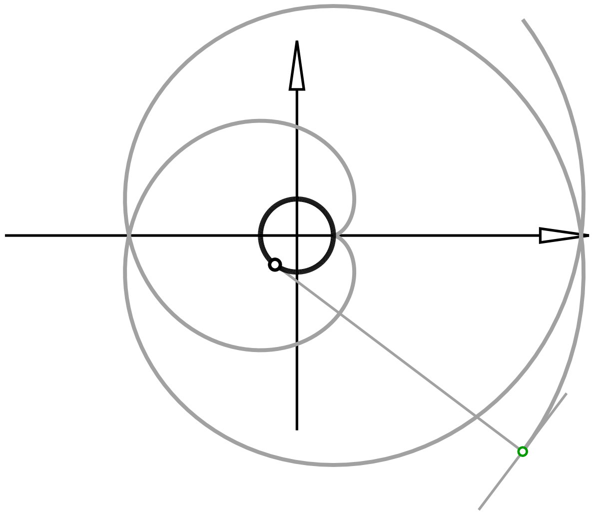


Figura 2.4 – An involute of a circle

Următoarea lemă stabileşte o legătură dintre curbura cu semn a unei curbe parametrizate şi cea a evolventei sale şi va servi ca mijloc pentru a stabili o legătură între evolută şi evolventă.

Lemă. *Fie* $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(s))$ *o curbă parametrizată natural şi* $\boldsymbol{\rho}$ *evolventa lui* $\mathbf{r}$ *cu originea în* $c \in I$*. Atunci curbura cu semn a lui* $\boldsymbol{\rho}$ *este dată de*

$$k_{\pm}[\boldsymbol{\rho}](s) = \frac{\operatorname{sgn}(k_{\pm}[\mathbf{r}](s))}{|c - s|}.$$

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho}'(s) &= \mathbf{r}'(s) + (c-s)\mathbf{r}''(s) - \mathbf{r}'(s) = (c-s)\mathbf{r}''(s) = (c-s)k_{\pm}[\mathbf{r}](s)\cdot J\mathbf{r}'(s)\\
\boldsymbol{\rho}''(s) &= -k_{\pm}[\mathbf{r}](s.J\mathbf{r}'(s) + (c-s)(k_{\pm}[\mathbf{r}](s))'\cdot J\mathbf{r}'(s) + (c-s)k_{\pm}[\mathbf{r}](s)\cdot J\mathbf{r}''(s)\\
&= [-k_{\pm}[\mathbf{r}](s) + (c-s)(k_{\pm}[\mathbf{r}](s))']\cdot J\mathbf{r}'(s) - (c-s)(k_{\pm}[\mathbf{r}](s))^2\cdot\mathbf{r}'(s),
\end{aligned}$$

de unde

$$J\boldsymbol{\rho}' = -(c-s)k_{\pm}[\mathbf{r}](s)\cdot\mathbf{r}'(s),$$

în timp ce

$$\boldsymbol{\rho}''(s)\cdot J\boldsymbol{\rho}'(s) = (c-s)^2\cdot(k_{\pm}[\mathbf{r}](s))^3.$$

Concluzia rezultă acum din definiţia curburii cu semn. □

Următoarea teoremă ne dă o legătură între evolventă şi evolută. În multe manuale această legătură este luată, de fapt, ca definiţie a evolventei.

Teoremă. *Fie $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(s))$ o curbă parametrizată natural şi $\boldsymbol{\rho}$ – evolventa sa cu originea în $c \in I$. Atunci evoluta lui $\boldsymbol{\rho}$ este* $\mathbf{r}$.

Demonstraţie. Evoluta lui $\boldsymbol{\rho}$ este dată, după cum se ştie, de ecuaţia

$$\boldsymbol{\rho}_1(s) = \boldsymbol{\rho}(s) + \frac{1}{k_{\pm}[\boldsymbol{\rho}](s)}\cdot\frac{J\boldsymbol{\rho}'(s)}{\|\boldsymbol{\rho}'(s)\|}.$$

Folosind lema precedentă pentru a exprima curbura cu semn a lui $\boldsymbol{\rho}$ ca funcţie de curbura cu semn a lui $\mathbf{r}$, obţinem

$$\boldsymbol{\rho}_1(s) = \mathbf{r}(s) + (c-s)\mathbf{r}'(s) + \frac{|c-s|}{\operatorname{sgn}(k_{\pm}[\mathbf{r}](s))}\cdot\frac{(c-s)k_{\pm}[\mathbf{r}](s)\cdot J^2\mathbf{r}'(s)}{\|(c-s)k_{\pm}[\mathbf{r}](s)\cdot J\mathbf{r}'(s)\|} = \mathbf{r}(s).$$

□

2.5 Cercul osculator al unei curbe

Definiţie. Fie $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ o curbă parametrizată. *Cercul osculator* al lui $\mathbf{r}$ într-un punct $t \in I$ este cercul cu centrul în centrul de curbură $\Omega(t)$, cu raza egală cu raza de curbură $\frac{1}{k(t)}$ a curbei în acel punct.

Aşa cum planul osculator într-un punct al unei curbe în spaţiu poate fi privit ca fiind poziţia limită a planului determinat de trei puncte vecine, când ele se apropie indefinit de punctul dat, cercul osculator este poziţia limită a unui cerc determinat de trei puncte vecine, atunci când acestea se apropie indefinit de punctul dat. Mai precis, avem:

Teoremă. *Fie* $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t))$ *o curbă parametrizată plană şi* $t_1 < t_2 < t_3 \in I$. *Fie* $C(t_1, t_2, t_3)$ *cercul care trece prin* $\mathbf{r}(t_1)$*,* $\mathbf{r}(t)2)$*,* $\mathbf{r}(t_3)$*. Presupunem că, pentru o valoare* $t \in I$ *a parametrului avem* $k_\pm(t) \neq 0$*. Atunci cercul osculator al lui* $\mathbf{r}$ *în punctul* $\mathbf{r}(t)$ *este cercul*

$$C = \lim_{\substack{t_1 \to t \\ t_2 \to t \\ t_3 \to t}} C(t_1, t_2, t_3).$$

Demonstraţie. Fie $A(t_1, t_2, t_3)$ centrul cercului $C(t_1, t_2, t_3)$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ – funcţia definită prin $f(t) = \|\mathbf{r}(t) - A\|^2$. Atunci, în mod clar, f este netedă şi avem:

$$\begin{cases} f'(t) = 2\mathbf{r}' \cdot (\mathbf{r}(t) - A) \\ f''(t) = 2\mathbf{r}''(t) \cdot (\mathbf{r}(t) - A) + 2\|\mathbf{r}'(t)\|^2 \end{cases}.$$

Întrucât f este diferenţiabilă şi $f(t_1) = f(t_2) = f(t_3)$, din teorema de medie rezultă că există două puncte $u_1, u_2 \in I$, cu $t_1 < u_1 < t_2 < u_2 < t_3$ astfel încât

$$f'(u_1) = f(u_2) = 0.$$

Pe de altă parte, dacă aplicăm încă o dată teorema de medie, de data aceasta derivatei f', care este de asemenea diferenţiabilă, rezultă că există un $v \in (u_1, u_2)$ astfel încât

$$f''(v) = 0.$$

Acum, dacă facem ca $t_1, t_2, t_3 \to t$, atunci vom avea, de asemenea, $u_1, u_2, v \to t$, de aceea, la limită, trebuie să obţinem:

$$\begin{cases} \mathbf{r}'(t) \cdot (\mathbf{r}(t) - A(t)) = 0 \\ \mathbf{r}''(t) \cdot (\mathbf{r}(t) - A(t)) = -\|\mathbf{r}'(t)\|^2 \end{cases}, \tag{*}$$

unde

$$A(t) = \lim_{\substack{t_1 \to t \\ t_2 \to t \\ t_3 \to t}} A(t_1, t_2, t_3).$$

Din (*) şi definiţia curburii cu semn rezultă că

$$\mathbf{r}(t) - A(t) = \frac{-1}{k_{\pm}(t)} \cdot \frac{J\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|},$$

deci C este cercul osculator al curbei $\mathbf{r}$ în punctul $\mathbf{r}(t)$. □

2.6 Teorema de existanţă şi unicitate pentru curbe plane

Teorema de existenţă şi unicitate pentru curbe parametrizate plane este similară teoremei analoage pentru curbe în spaţiu şi poate fi demonstrată în acelaşi mod, de aceea vom omite aici demonstraţia.

Teorema 2.6.1. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci există o curbă plană regulară, parametrizată natural, $(I, \mathbf{r} = \mathbf{r}(s))$ astfel încât $\forall s \in I$, $k_{\pm}(s) = f(s)$. $\mathbf{r}$ este unică, până la o mişcare proprie a lui $\mathbb{R}^2$.*

Pentru a da un exemplu, vom găsi curba $\mathbf{r}$ pentru cazul particular în care funcţia f este o constantă α, pentru orice valoare reală a parametrului s.

Plecând de la interpretarea geometrică a curburii cu semn, obţinem

$$\alpha = k_{\pm}(s) = \frac{d\theta}{ds},$$

de aceea θ (unghiul de rotaţie) va fi o funcţie afină de s:

$$\theta = \alpha s + \theta_0,$$

unde θ_0 este o constantă. Pe de altă parte, din definiţia unghiului de rotaţie, obţinem:

$$\boldsymbol{\tau}(s) \equiv \left\{\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right\} = \{\cos\theta(s), \sin\theta(s)\} = \{\cos(\alpha s + \theta_0), \sin(\alpha s + \theta_0)\}$$

de unde rezultă sistemul de ecuaţii diferenţiale:

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \cos(\alpha s + \theta_0) \\ \frac{dy}{ds} = \sin(\alpha s + \theta_0) \end{cases}.$$

Întrucât ecuaţiile sunt separate, sistemul poate fi integrat foarte uşor şi obţinem soluţia:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\alpha}[\sin\alpha s \sin\theta_0 + \cos\alpha s \sin\theta_0] + x_0, \\ y = \frac{1}{\alpha}[-\cos\alpha s \cos\theta_0 + \sin\alpha s \sin\theta_0] + y_0 \end{cases}, \tag{*}$$

unde x_0 şi y_0 sunt două constante de integrare. Soluţia (*) poate fi scrisă sub forma matricială

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}\sin\alpha s\sin\theta_0 + \frac{1}{\alpha}\cos\alpha s\sin\theta_0 \\ -\frac{1}{\alpha}\cos\alpha s\cos\theta_0 + \frac{1}{\alpha}\sin\alpha s\sin\theta_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

sau, de asemenea,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}\cos\alpha s \\ \frac{1}{\alpha}\sin\alpha s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

ceea ce demonstrează că orice curbă plană de curbură cu semn constantă, egală cu α poate fi obţinută din curba

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\alpha}\cos\alpha s \\ y = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha s \end{cases}$$

aplicând o rotaţie urmată de o translaţie, adică o *deplasare*. Dar aceasta este un cerc de rază $1/\alpha$, cu centrul în origine. Concluzia este că, abstracţie făcând de o deplasare a planului, *singura curbă plană de curbură constantă pozitivă α este cercul de rază $1/\alpha$.*

Integrarea ecuaţiilor naturale ale unei curbe în spaţiu | 3

3.1 Ecuaţia Riccati asociată cu ecuaţiile naturale ale unei curbe

Teoria generală a ecuaţiilor diferenţiale garantează existanţa şi unicitatea soluţiei ecuaţiilor lui Frenet ale unei curbe, până la o deplasare a spaţiului. Totuşi, determinarea *analitică* a unei curbe dacă i se dau curbura şi torsiunea este cu totul altceva. Această determinare înseamnă, desigur, găsirea unei soluţii analitice a ecuaţiilor lui Frenet. Deşi ele par inofensive, se dovedeşte, în cazul general, sistemul pe care îl formează nu poate fi integrat analitic.

În mod clar, dacă reuşim să rezolvăm sistemul lui Frenet, atunci, în particular, putem găsi versorul tangentei şi, printr-o altă cuadratură, putem găsi curba. În aparenţă, sistemul lui Frenet ar trebui să fie echivalent cu un sistem de trei ecuaţii vectoriale de ordinul întâi sau cu un sistem de trei ecuaţii scalare de ordinul al treilea. Cu toate acestea, se dovedeşte că sistemul (format din nouă ecuaţii scalare) conţine, de fapt trei seturi identice de câte trei ecuaţii, de aceea este echivalent cu o singură ecuaţie scalară de ordinul al treilea. Mai mult, cei trei vectori ai soluţiei se supun condiţiilor de ortonormalitate, ceea ce ar trebui să permită reduceri suplimentare. În fapt, vom demonstra acest lucru indirect, demonstrând că sistemul lui Frenet este echivalent cu o ecuaţie diferenţială de tip Ricatti, de ordinul al doilea. După cum se ştie din teoria ecuaţiilor diferenţiale, putem găsi soluţia generală a unei ecuaţii Ricatti dacă şi numai dacă cunoaştem deja o soluţie particulară a sa (şi nu există nici o procedură generală pentru a găsi o astfel de soluţie).

Remarcăm, înainte de toate, că sistemul lui Frenet conţine trei copii ale sistemului scalar:

$$\begin{cases} X' = k(s)Y, \\ Y' = -k(s)X + \chi(s)Z \\ Z' = -\chi(s)Y \end{cases} \tag{3.1.1}$$

iar soluţia acestui sistem trebuie să verifice, de asemenea, condiţia

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1. \tag{3.1.2}$$

Idea pe care o vom descrie (şi care îşi are originile în lucrările lui Sophus Lie şi Gaston Darboux), rezultă tocmai din condiţia suplimentară (3.1.2). Anume, s-a observat că această ecuaţie poate fi descompusă (peste numerele complexe) ca

$$(X + iY)(X - iY) = (1 - Z)(1 + Z).$$

Introducem acum funcţiile complexe u şi v punând

$$u = \frac{X + iY}{1 - Z}; \quad -\frac{1}{v} = \frac{X - iY}{1 - Z}. \tag{3.1.3}$$

În mod clar, u şi $-1/v$ sunt complex conjugate. Este posibil să exprimăm X, Y, Z în funcţie de u şi v. Se poate verifica uşor că

$$X = \frac{1 - uv}{u - v}; \quad Y = i\frac{1 + uv}{u - v}; \quad Z = \frac{u + v}{u - v}. \tag{3.1.4}$$

Astfel, rezolvarea sistemului lui Frenet se reduce la găsirea funcţiilor complexe u şi v. Acum, o manipulare uşoară a formulelor demonstrează că atât u cât şi v sunt soluţii ale ecuaţiei Ricatti

$$\frac{dw}{ds} = -\frac{i}{2}\chi(s) - ik(s)w + \frac{i\chi(s)}{2}w^2. \tag{3.1.5}$$

Aceasta este, după cum am menţionat mai devreme, o demonstraţie indirectă a faptului că ecuaţiile naturale ale unei curbe în spaţiu nu pot fi integrate, în general, prin cuadraturi.

3.2 Exemple de integrare a ecuaţiei naturale a unei curbe plane

Am văzut, în secţiunea precedentă, că curbele plane de curbură constantă sunt cercurile, şi numai ele. Vom da, în cele ce urmează, alte exemple interesante de ecuaţii naturale de curbe plane care pot fi integrate. Ca să fim şi mai precişi, în realitate, spre deosebire de cazul curbelor în spaţiu, pentru curbele plane ecuaţia naturală poate fi integrată în toate cazurile, problema este că, de cele mai multe ori, nu putem exprima soluţia în limbajul funcţiilor elementare. De aceea sunt cu atân mai interesante puţinele cazuri în care putem face acest lucru. Pentru comoditate, vom utiliza, în restul acestui paragraf, *raza de curbură* $R = 1/k$ în locul curburii.

Spirala logaritmică. În acest caz, raza de curbuă este dată de

$$R = a \cdot s, \tag{3.2.1}$$

unde a este o constantă. Fie α unghiul de contingenîă. Atunci, după cum ştim, avem

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R(s)} = \frac{1}{as},$$

de aceea, integrând şi neglijând termenul constant, obţinem

$$\alpha = \frac{1}{a}\ln s, \quad \text{de unde} \quad s = e^{a\alpha}.$$

Pentru a obţine coordonatele, trebuie să integrăm sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha.$$

Avem (omiţând, din nou, constantele de integrare)

$$x = \int \cos\alpha ds = a\int \cos\alpha e^{a\alpha} d\alpha = \frac{ae^{a\alpha}}{a^2+1}(a\cos\alpha + \sin\alpha)$$

şi, în mod analog,

$$y = \int \sin\alpha\, ds = \frac{ae^{a\alpha}}{a^2+1}(a\sin\alpha - \cos\alpha).$$

Prin urmare, ecuaţiile parametrice ale spiralei logaritmice sunt

$$\begin{cases} x = \dfrac{ae^{a\alpha}}{a^2+1}(a\cos\alpha + \sin\alpha) \\ y = \dfrac{ae^{a\alpha}}{a^2+1}(a\sin\alpha - \cos\alpha) \end{cases}. \tag{3.2.2}$$

Spirala logaritmică (vezi figura 3.1) este descrisă cel mai convenabil prin ecuaţia sa în coordonate polare, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi)$. Vom explica acum cum se poate obţine această ecuaţie, plecând de la ecuaţiile parametrice. Înainte de toate, remarcăm că

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2e^{2a\alpha}}{a^2+1},$$

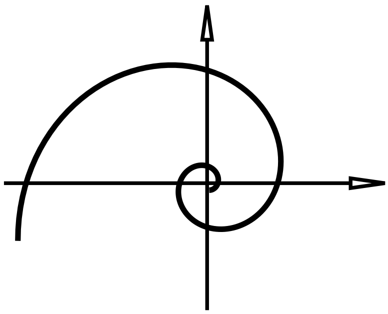


Figura 3.1 – The logarithmic spiral

de unde

$$\mathbf{r} = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{a e^{a\alpha}}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Punem $a = \tan\psi$. Atunci, pentru unghiul polar obţinem

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} = \frac{a\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + a\cos\alpha} = -\cot(\alpha+\psi),$$

de aceea $\varphi = \alpha + \psi + \frac{\pi}{2}$, prin urmare $\alpha = \varphi - \psi - \frac{\pi}{2}$. Astfel,

$$\mathbf{r} = \sin\psi e^{\varphi - \psi - \frac{\pi}{2}},$$

adică ecuaţia polară a spiralei logaritmice este de form

$$r = C \cdot e^{\varphi}, \tag{3.2.3}$$

unde C este o constantă.

Cycloidal curves. They correspond to the natural equation

$$\frac{s^2}{a^2} + \frac{R^2}{b^2} = 1, \tag{3.2.4}$$

where a and b are nonvanishing constants. A possibility would be to express R in terms of s and then integrate. However, this would lead to complications, due to the

the presence of the square root and the sign ambiguity. We prefer, instead, to introduce a new parameter t, through the relations

$$s = a\sin t, \quad R = b\cos t.$$

It is, then, very easy to find the contingency angle in terms of this new parameter. Indeed, we have

$$\alpha = \int \frac{1}{R} ds = \int \frac{1}{b\cos t} a\cos t\, dt = \frac{at}{b}.$$

We can proceed now with the determination of the coordinates x and y, in terms of the parameter t:

$$x = \int \cos\alpha\, ds = \int \cos\frac{at}{b}\cdot a\cdot \cos t\, dt = \frac{a}{2}\left(\frac{b}{a-b}\sin\frac{(a-b)t}{b} + \frac{b}{a+b}\sin\frac{(a+b)t}{b}\right),$$

$$y = \int \sin\alpha\, ds = \int \sin\frac{at}{b}\cdot a\cdot \cos t\, dt = -\frac{a}{2}\left(\frac{b}{a-b}\cos\frac{(a-b)t}{b} + \frac{b}{a+b}\cos\frac{(a+b)t}{b}\right).$$

The clothoid. This is the curve whose natural equation is

$$R = \frac{a^2}{s}. \tag{3.2.5}$$

Thus, for the clothoid (also known as the *Cornu's spiral*), the radius of curvature is proportional to the *inverse* of the arc length. From this point of view, it is, to some extent, similar to the logarithmic spiral,

where the radius of curvature was proportional to the

arc length, rather than to its inverse. We include this curve here to show that even in the case of a very simple expression of the curvature in terms of the arc length (in this case the curvature is proportional to the arc length, i.e. it is a linear function), we might not be able to find a parametric representation in terms of elementary functions.

The contingency angle is easily found:

$$\alpha = \frac{s^2}{2a}, \tag{3.2.6}$$

therefore the coordinates are

$$x = \int \cos\frac{s^2}{2a}\, ds, \quad x = \int \sin\frac{s^2}{2a}\, ds. \tag{3.2.7}$$

Unfortunately, it is a well known fact from analysis that the integrals from (3.2.7) cannot be expressed in terms of elementary functions. They carry the name of *Fresnel integrals*, after the French physicists who used them first in his works on optics (the theory of diffraction, to be more specific)[1].

The catenary. For the catenary, the natural equation is

$$R = a + \frac{s^2}{a}, \tag{3.2.8}$$

where a is a non-vanishing constant. Again, instead of integrating directly, to get the contingency angle, we introduce, first, the new parameter t through the relations

$$s = a \tan t, \quad R = \frac{a}{\cos^2 t}. \tag{3.2.9}$$

Then the contingency angle will be

$$\alpha \equiv \int \frac{1}{R(s)}\, ds = \int \frac{\cos^2 t \cdot a}{a \cdot \cos^2 t}\, dt = t.$$

The coordinates are, now, easy to find in terms on the new parameter:

$$x = \int \cos\alpha ds = \int \frac{a \cos t}{\cos^2 t}\, dt = a \int \frac{1}{\cos t}\, dt = \ln\left(\frac{1 + \sin t}{\cos t}\right),$$

and, analogously,

$$y = a\frac{1}{\cos t}.$$

It is not difficult to check that one can eliminate the parameter t from the previous two equation and one gets the usual explicit equation of the catenary, i.e.

$$y = a \cosh\frac{x}{a}. \tag{3.2.10}$$

[1] According to Gino Loria, in fact, these integrals were first considered by Euler, in 1781.

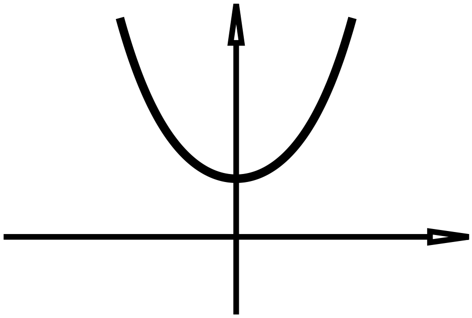


Figura 3.2 – The catenary

The involute of the circle. Let us start with the natural equation

$$R^2 = 2as. \tag{3.2.11}$$

We introduce a new parameter, t, such that

$$s = \frac{at^2}{2}, \quad R = at.$$

Then the contingency angle is

$$\alpha = \int \frac{1}{R}\, ds = \int \frac{1}{at} \cdot at\, dt = t,$$

therefore

$$x = \int \cos\alpha\, ds = \int at \cos t\, dt = a(\cos t + t \sin t)$$

and

$$y = \int \sin\alpha\, ds = \int at \sin t\, dt = a(\sin t - t \cos t),$$

which are, indeed, the parametric equations of the involute of the circle.

The tractrix. Finally, we start with the natural equation

$$R^2 + a^2 = a^2 e^{-2s/a}, \tag{3.2.12}$$

where a is a non-vanishing constant. We introduce the parameter t such that

$$e^{-\frac{s}{a}} = \frac{1}{\cos t}, \quad R = a \tan t.$$

Then

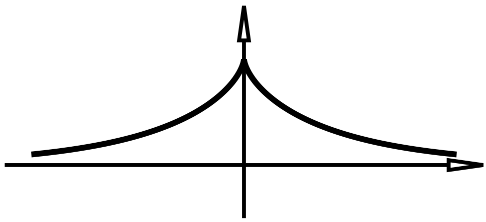


Figura 3.3 – The tractrix

$$\alpha = \int \frac{1}{R}\, ds = \int \frac{1}{a \tan t}(-a \tan t)\, dt = -t,$$

therefore

$$x = \int \cos\alpha\, ds = \int \cos t(-a \tan t)\, dt = a \cos t$$

and

$$y = \int \sin\alpha\, ds = \int \sin t \cdot a \cdot \tan t\, dt = a \left(\ln \frac{1 + \sin t}{\cos t} - \sin t \right).$$

Partea II

Suprafeţe

Teoria generală a suprafeţelor | 4

4.1 Suprafeţe parametrizate (pânze)

Definiţie. O suprafaţă parametrizată (pânză) în $\mathbb{R}^3$ este o aplicaţie netedă $\mathbf{r} : U \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \to \mathbf{r}(u, v)$, unde U este un domeniu (o submulţime deschisă şi conexă) a lui $\mathbb{R}^2$, în timp ce $\mathbf{r}$ îndeplineşte condiţia

$$\mathbf{r}_{\mathbf{u}}^{'} \times \mathbf{r}_{\mathbf{v}}^{'} \neq 0. \tag{4.1.1}$$

Condiţia (4.1.1) se numeşte *condiţia de regularitate*.

O suprafaţă parametrizată se notează, de obicei, cu $(U, \mathbf{r})$, $(U, \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v))$ sau, pur şi simplu, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, dacă domeniul de definiţie este subînţeles.

Definiţie. Mulţimea $\mathbf{r}(U) \subset \mathbb{R}^3$ se numeşte *suportul* suprafeţei parametrizate $(U, \mathbf{r})$.

Observaţie. De regulă, unul şi acelaşi punct al suportului unei suprafeţe parametrizate $(U, \mathbf{r})$ poate corespunde mai multor perechi (u, v) distincte, deoarece nu se presupune că funcţia $\mathbf{r}$ este injectivă.

Definiţie. Două suprafeţe parametrizate $(U, \mathbf{r})$ şi $(V, \mathbf{r}_1)$ se numesc *echivalente* dacă există un difeomorfism $\lambda : U \to V$ astfel încât $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 \circ \lambda$.

Observaţie. Suporturile a două suprafeţe parametrizate echivalente coincid întotdeauna.

Exemple. 1. Dacă $U = \mathbb{R}^2$, în timp ce $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0$, atunci suportul suprafeţei parametrizate este planul care trece prin punctul de vector de poziţie $\mathbf{r}_0$ şi este perpendicular pe vectorul $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Această suprafaţă parametrizată se numeşte *plan*.

2. Fie $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | \pi/2 < u < \pi/2, 0 < v < 2\pi\}$ şi
$$\mathbf{r}(u, v) = (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u).$$
Suportul acestei suprafeţe parametrizate este sfera de rază R, cu centrul în originea lui of $\mathbb{R}^3$, mai puţin un meridian. Parametrii u şi v sunt analogi coordonatelor geografice.

3. Fie $U = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v^3\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0$. Suportul acestei suprafeţe parametrizate este acelaşi cu suportul suprafeţei parametrizate de la exemplul 1), dar cele două suprafeţe nu sunt echivalente, deoarece aplicaţia $(u, v) \to (u, v^3)$ nu este un difeomrfism.

4.2 Suprafeţe

Definiţie. O submulţime a $S \subset \mathbb{R}^3$ se numeşte *suprafaţă regulară* dacă fiecare punct $a \in S$ al său are o vecinătate deschisă W în S astfel încât să existe o suprafaţă parametrizată $(U, \mathbf{r})$ cu $\mathbf{r}(U) = W$, în timp ce aplicaţia $\mathbf{r} : U \to W$ este un omeomorfism. Perechea se numeşte *parametrizare locală* a suprafeţei S în jurul punctului a, în timp ce suportul $\mathbf{r}(U)$ se numeşte *domeniul* parametrizării. O suprafaţă S care admite o parametrizare *globală* (adică o parametrizare locală $(U, \mathbf{r})$ pentru care $\mathbf{r}(U) = S$) se numeşte o suprafaţă *simplă*.

4.2.1 Reprezentarea suprafeţelor

Modalităţile prin care am descris curbele sunt, în egală măsură, disponibile şi pentru suprafeţe.

Reprezentarea parametrică. Dacă S este o suprafaţă, iar $(U, \mathbf{r})$ este o parametrizare locală a lui S, atunci, dacă $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, ecuaţiile
$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in U,$$
se numesc *ecuaţii parametrice* ale suprafeţei. Precizăm, încă o dată, că acestea sunt doar ecuaţii *locale*, ele nu pot fi utilizate petru descrierea tuturor punctelor suprafeţelor, decât dacă avem de-a face cu o parametrizare globală a unei suprafeţe simple.

Reprezentarea explicită. Dacă $f : U \to \mathbb{R}$ este o aplicaţie netedă, unde $U \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu, atunci graficul său, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$ este o suprafaţă simplă. Într-adevăr, avem parametrizarea globală $\mathbf{r} : U \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$.

Reprezentarea implicită. Fie $F : V \to \mathbb{R}$ o funcţie netedă, cu $V \subset \mathbb{R}^3$ o submulţime deschisă. Vom nota cu

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$$

mulţimea de nivel 0 a lui F. Dacă, în fiecare punct al lui S, vectorul

$$\text{grad } F = \left\{\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right\}$$

este nenul, atunci S este o suprafaţă. Într-adevăr, dacă, de exemplu, în $(x_0, y_0, z_0) \in S$, avem $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, atunci, din teorema funcţiilor implicite, rezultă că există o vecinătate deschisă (în topologia lui $\mathbb{R}^3$) M a lui (x_0, y_0, z_0) astfel încât mulţimea t $M \cap S$ (care este o vecinătate deschisă a lui (x_0, y_0, z_0), de această dată în topologia lui S) este graficul unei funcţii netede $z = f(x, y)$, de aceea, aşa cum rezultă din paragraful precedent, există o parametrizare locală a lui S în jurul punctului (x_0, y_0, z_0). Remarcăm că această parametrizare este globală pentru $M \cap S$ dar, în general, nu pentru întregul S. Chiar dacă F'_z este nenulă pe întreaga mulţime S, tot nu este sigur că funcţia f poate fi definită global. Astfel, spre deosebire de cazul suprafeţelor date explicit, cele date implicit nu sunt, de obicei, simple.

Exemple. 1. Planul Π care trece prin punctul de vector de poziţie $\mathbf{r}_0$ şi are direcţia dată de vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$, cu $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0$ este o suprafaţă simplă, cu parametrizarea globală $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$. În proiecţie pe axele de coordonate, ecuaţiile parametrice ale planului sunt

$$\begin{cases} x = x_0 + ua_x + vb_x \\ y = y_0 + ua_y + vb_y \\ z = z_0 + ua_z + vb_z \end{cases}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

2. *Suprafeţe de revoluţie*
Fie C o curbă în planul xOz, care nu intersectează axa Oz, şi S – submulţimea

lui $\mathbb{R}^3$ care se obţine prin rotirea lui C în jurul axei Oz. Fie v unghiul de rotaţie al planului xOz şi a' – punctul lui S obţinut rotind punctul $a \in C$ cu un unghi v_0. Fie $(I, \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(t))$ o parametrizare locală a curbei C în jurul punctului a, $\boldsymbol{\rho}(t) = (x(t), z(t))$. Atunci obţinem parametrizarea locală a lui S în jurul lui a',

$$\mathbf{r}(t, v) = (x(t)\cos(v + v_0), x(t)\sin(v + v_0), z(t)),$$

definită pe domeniul $U = I \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

3. *Sfera.* Fie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$. F este, în mod evidenty, o funcţie netedă, iar mulţimea sa de nivel 0

$$S_R^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$$

este sfera de rază R, cu centrul în origine. Gradientul lui F este

$$\operatorname{grad} F = \{2x, 2y, 2z\}$$

şi, în mod evident, nu se anulează pe sfera S_R^2, de aceea, această sferă este o suprafaţă regulară. Este de remarcat că S_R^2 nu este simplă, deoarece este o submulţime compactă a lui $\mathbb{R}^3$, de aceea nu poate fi omeomorfă cu o submulţime deschisă a lui $\mathbb{R}^2$, care nu este compactă.

4. *Torul.* Alegem acum $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$F(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 - b^2, \quad 0 < b < a.$$

Mulţimea sa de nivel 0,

$$T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | F(x, y, z) = 0\}$$

se numeşte *tor bidimensional*. Calculând derivatele parţiale ale lui F în raport cu coordonatele, obţinem

$$\begin{cases} F'_x = 2\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right) \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ F'_y = 2\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right) \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ F'_z = 2z \end{cases},$$

de aceeea, gradientul lui F se anulează dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} x = y = z = 0 \quad \text{or} \\ x^2 + y^2 = 0, y = 0, z = 0 \quad \text{or} \\ x = 0, x^2 + y^2 = a^2, z = 0 \quad \text{or} \\ x^2 + y^2 = a^2, z = 0 \end{cases}.$$

Este uşor de verificat că grad F este nenul pe T^2, de aceea toruyl este o suprafaţă (din nou, este compactă, de aceea nu poate fi simplă).

Torul se poate obţine şi prin rotirea cercului $(x-a)^2 + z^2 = b^2$ (situat în planul xOz) în jurul axei Oz.

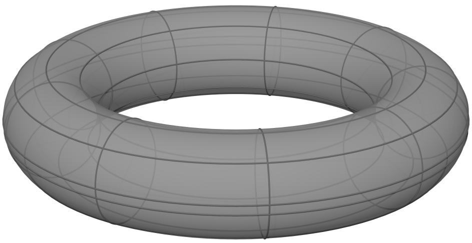


Figura 4.1 – The torus

4.3 Echivalenţa parametrizărilor locale

Definiţie. Fie S o suprafaţă, $(U, \mathbf{r})$ – o parametrizare locală a sa şi $W = \mathbf{r}(U)$. Atunci aplicaţia $\mathbf{r}^{-1} : W \to U$ este o bijecţie, care asociază fiecărui punct din W o pereche de numere reale $(u, v) \in U$. Această corespondenţă se numeşte un *sistem de coordonate curbilinii* pe S sau o *hartă* pe S.

Observaţie. Trebuie să menţionăm aici că în multe cărţi obiectele fundamentale utilizate pentru a descrie o suprafaţă nu sunt parametrizările locale, ci hărţile. Desigur, cele două abordări sunt complet echivalente, dar ele provin din direcţii diferite. Descrierea suprafeţelor folosind parametrizări locale îşi are, probabil, originea în analiza matematică, unde suprafeţele sunt văzute fie ca imagini de funcţii, fie ca grafice de funcţii. În ambele cazuri, obiectele centrale sunt *funcţii*. Abordarea care utilizează hărţile îşi are originea în cartografie. În fapt, ataşarea unei hărţi locale la o suprafaţă înseamnă, pur şi simplu să aplicăm o bucată din acea suprafaţă pe o porţiune a unui plan, cu alte cuvinte, construirea unei "hărţi" a suprafeţei şi, de fapt, în geometria diferenţială modernă, o colecţie d hărţi care acoperă întreaga suprafaţă se numeşte *atlas*, ca în cartografie.

Teorema 4.3.1. *(a schimbării de parametri) Fie* $(U, \mathbf{r})$ *şi* $(U_1, \mathbf{r}_1)$ *două parametrizări locale ale unei suprafeţe* S *şi* $\mathbf{r}(U) = \mathbf{r}(U_1)$. *Atunci există un difeomorfism* $\lambda : U \to U_1$ *astfel încât* $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 \circ \lambda$. *Difeomorfismul* λ *se numeşte* schimbare de parametri *sau* reparametrizare.

Înainte de a demonstra teorema, trebuie să facem câteva observaţii. Dacă există o schimbare de parametri λ, atunci, din relaţia $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 \circ \lambda$, rezultă, desigur, $\lambda = \mathbf{r}_1^{-1} \circ \mathbf{r}$. Dificultatea reală este să demonstrăm că atât λ, cât şi inversa ei sunt netede. Deşi $\mathbf{r}$ este netedă, $\mathbf{r}^{-1}$ nu este[1], deoarece domeniul său, $\mathbf{r}_1(U_1)$, nu este o submulţime deschisă a spaţiului euclidian $\mathbb{R}^3$. Vom demnstra, totuşi, în următoarea lemă, că, local, $\mathbf{r}_1^{-1}$ este *restricţia* unei funcţii netedei. Subliniem că această reprezentare a lui $\mathbf{r}_1^{-1}$ este doar locală: în general, $\mathbf{r}_1^{-1}$ nu sepoate scrie, pe tot domeniul său de definiţie, ca restricţia unei *singure*, definite pe mulţime deschisă (în topologia lui $\mathbb{R}^3$), care conţine mulţimea $\mathbf{r}_1(U_1)$.

Lemă. *Fie* $(U, \mathbf{r})$ *o parametrizare locală a suprafeţei* S, $\mathbf{r}(U) = W$ *şi* $\mathbf{r}^{-1} : W \to U$ *– aplicaţia inversă. Atunci, pentru fiecare punct* $a \in W$ *există o mulţime deschisă (în topologia lui* $\mathbb{R}^3$*)* $B \ni a$ *şi o aplicaţie netedă* $G : B \to U$ *astfel încât* $\mathbf{r}^{-1}|_{W \cap B} = G|_{W \cap B}$.

Demonstraţia lemei. Fie $\mathbf{r}(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v).f_3(u, v))$ şi $a = \mathbf{r}(u_0, v_0)$. Datorită regularităţii lui $\mathbf{r}$, matricea Jacobi

$$\begin{pmatrix} f'_{1u} & f'_{1v} \\ f'_{2u} & f'_{2v} \\ f'_{3u} & f'_{3v} \end{pmatrix}$$

are rangul doi. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că

$$\begin{vmatrix} f'_{1u} & f'_{1v} \\ f'_{2u} & f'_{2v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

[1]cel puţin nu în sensul clasic

Atunci, din teorema funcţiei inverse pentru aplicaţia

$$f : (u, v) \longrightarrow (x = f_1(u, v), y = f_2(u, v)),$$

rezultă că există o vecinătate deschisă V a punctului (u_0, v_0) din U şi o vecinătate deschisă $\widetilde{V}$ a punctului $(x_0 = f_1(u_0, v_0), y_0 = f_2(u_0, v_0))$ din planul xOy astfel încât $f : V \to \widetilde{V}$ să fie difeomorfism. Întrucât aplicaţia $\mathbf{r} : U \to W$ este un omeomorfism, $\mathbf{r}(V)$ este o vecinătate deschisă în S a punctului $a = \mathbf{r}(u_0, v_0)$, de aceea, în $\mathbb{R}^3$ există o vecinătate deschisă B a punctului a astfel încât $\mathbf{r}(V) = B \cap S = B \cap W$. Fie $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \to (x, y)$ proiecţia ortogonală pe planul de coordonate xOy. Vom arăta că aplicaţia $G = (f^{-1} \circ p)|_B : B \to U$ este cea pe care o căutăm. Într-adevăr, G este netedă, fiind o compunere de aplicaţii netede. Mai mult, fiecărui punct (x, y, z) din $B \cap W$ îi corespunde un singur punct $(u, v) = \mathbf{r}^{-1}(x, y, z)$ din V, şi fiecărui punct t $(x, y) \in \widetilde{V}$ – punctul $(u, v) = f^{-1}(x, y)$ din V. Astfel, pentru punctele $(x, y, z) \in B \cap W$, avem

$$\mathbf{r}^{-1}(x, y, z) = f^{-1}(x, y) = f^{-1}(p(x, y, z)) = G(x, y, z).$$

□

Demonstraţia teoremei. Fie $(U, \mathbf{r})$ şi $(U_1, \mathbf{r}_1)$ – două parametrizări locale ale suprafeţei S astfel încât $\mathbf{r}(U) = \mathbf{r}_1(U_1) = W$. Considerăm aplicaţia $\lambda = \mathbf{r}_1^{-1} \circ \mathbf{r} : U \to U_1$. Întrucât $\mathbf{r}_1 : U_1 \to W$ este un omeomorfism, acelaşi lucru este adevărat pentru $\mathbf{r}_1^{-1} : W \to U_1$ şi, astfel, λ este un omeomorfism, ca o compunere de două omeomorfisme. Trebuie doar să mai demonstrăm că λ şi λ^{-1} sunt netede. Pentru a demonstra netezimea lui λ este suficient să demonstrăm că fiecare punct $(u_0, v_0) \in U$ are o vecinătate deschisă $V \subset U$ astfel încât $\lambda|_V$ să fie netedă. Aplicăm lema precedentă parametrizării $(U_1, \mathbf{r}_1)$ a punctului $a = \mathbf{r}_1(\lambda(u_0, v_0))$. Fie $G : B \to U_1$ aplicaţia netedă pentru care $\mathbf{r}_1^{-1}|_{B\cap W} = G|_{B\cap W}$ şi $V = \mathbf{r}^{-1}(B \cap W)$. Atunci $\lambda|_V = \mathbf{r}_1^{-1} \circ \mathbf{r}|_V = (G \circ \mathbf{r})|_V$ şi, de aceea, $\lambda|_V$ este netedă, fiind restricţia unei aplicaţii netede. Netezimea lui λ^{-1} se demonstrează în acelaţi mod, înlocuind parametrizarea $\mathbf{r}_1$ cu parametrizarea $\mathbf{r}$. □

Local, fiecare suprafaţă este suportul unei suprafeţe parametrizate. Afirmaţia inversă nu este adevărată, adică suportul unei suprafeţe parametrizate arbitrare *nu* este o suprafaţă. Totuşi, dacă alegem o suprafaţă parametrizată arbitrară, restrângând domeniul său, putem obţine o suprafaţă parametrizată al cărei suport să fie o suprafaţă regulară. Astfel, avem:

Teorema 4.3.2. *Fie* $(U, \mathbf{r})$ *o suprafaţă parametrizată regulară. Atunci fiecare punct* $(u_0, v_0) \in U$ *are o vecinătate deschisă* $V \subset U$ *astfel încât* $\mathbf{r}(V)$ *să fie o suprafaţă simplă în* $\mathbb{R}^3$*, pentru care perechea* $(V, \mathbf{r}|_V)$ *este o parametrizare globală.*

Demonstraţie. Singura condiţie suplimentară pe care trebuie să o impunem asupra lui V este ca aplicaţia $\mathbf{r}|_V : V \to \mathbf{r}(V)$ să fie un omeomorfism. Fie $\mathbf{r}(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că Jacobianul aplicaţiei $f : (u, v) \to (x = f_1(u, v), y = f_2(u, v))$ este nenul în (u_0, v_0). Atunci, din teorema funcţiei inverse rezultă că există o vecinătate deschisă $V \subset U$ a punctului point (u_0, v_0) şi o vecinătate deschisă $\widetilde{V}$ a punctului $(x_0, y_0) = f(u_0, v_0)$ astfel încât aplicaţia $F : V \to \widetilde{V}$ să fie un difeomorfism. Vom demonstra, mai întâi, injectivitatea aplicaţiei $\mathbf{r}|_V : V \to \mathbf{r}(V)$. Fie $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in V$, astfel încât $\mathbf{r}(u_1, v_1) = \mathbf{r}(u_2, v_2)$. Atunci, în particular,

$$f_1(u_1, v_1) = f_1(u_2, v_2) \quad \text{şi} \quad f_2(u_1, v_1) = f_2(u_2, v_2),$$

adică $f(u_1, v_1) = f(u_2, v_2)$. Ori, f este un difeomorfism, prin urmare este, în particular, o aplicaţie injectivă, de aceea $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$. Aplicaţia $\mathbf{r} : U \to \mathbb{R}^3$ este continuă, de aceea şi restricţia sa $\mathbf{r}|_V : V \to \mathbb{R}^3$. Întrucât pe $\mathbf{r}(V)$ folosim topologia de subspaţiu, aplicaţia $\mathbf{r}|_V : V \to \mathbf{r}(V)$ este, de asemenea, continuă. Pentru a demonstra continuitatea aplicaţiei inverse, remarcăm că ea este compunerea aplicaţiilor continue următoare: $(x, y, z) \in \mathbf{r}(V) \to (x, y) \in \widetilde{V} \to (u, v) = f^{-1}(x, y) \in V$, după cum am văzut în demonstrarea lemei. □

4.4 Curbe pe o suprafaţă

Vom spune că o curbă parametrizată netedă $(I, \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(t))$ este situată pe o suprafaţă S dacă suportul său $\boldsymbol{\rho}(I)$ este inclus în S. În particular, putem descrie cu uşurinţă curbele parametrizate cu suportul conţinut în domeniul unei parametrizări $(U, \mathbf{r})$ a suprafeţei S.

Teorema 4.4.1. *Fie* $(U, \mathbf{r})$ *o parametrizare a suprafeţei* S *şi* $(I, \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(t))$ *ocurbă parametrizată netedă al cărei suport este inclus în* $\mathbf{r}(U)$*. Atunci există o singură curbă parametrizată netedă* $(I, \tilde{\boldsymbol{\rho}})$ *pe* U *astfel încât*

$$\boldsymbol{\rho}(t) \equiv \boldsymbol{\rho}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}(t)). \tag{4.4.1}$$

Reciproc, orice curbă parametrizată netedă $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ pe U defineşte, prin formula (4.4.1), o curbă parametrizată netedă pe $\mathbf{r}(U)$. Regularitatea lui $\boldsymbol{\rho}$ în t este echivalentă cu regularitatea lui $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ în t.

Demonstraţie. Întrucât aplicaţia $\mathbf{r} : U \to \mathbf{r}(U)$ este un omeomorfism, în timp ce $\boldsymbol{\rho}(I) \subset \mathbf{r}(U)$, din formula (4.4.1) putem obţine $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$, punând

$$\tilde{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{r}^{-1} \circ \boldsymbol{\rho}.$$

În mod clar, $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ este continuă, fiind compunerea a două aplicaţii continue. Vom verifica acum că $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ este, de fapt, netedă. Dacă $t \in I$, atunci $\boldsymbol{\rho}(t) \in \mathbf{r}(U)$. Potrivit lemei din paragraful precedent, există o vecinătate deschisă B a punctului $\boldsymbol{\rho}(t)$ din $\mathbb{R}^3$ şi o aplicaţie netedă $G : B \to U$ astfel încât $\mathbf{r}^{-1}|_{B\cap\mathbf{r}(U)} = G|_{B\cap\mathbf{r}(U)}$. De aceea, aplicaţia $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ poate fi reprezeă, în vecinătatea punctului t, ca o compunere de aplicaţii netede $G \circ \boldsymbol{\rho}$ şi, astfel, este netedă. Afirmaţia reciprocă poate fi demonstrată chiar mai simplu, pentru că avem

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} \circ \tilde{\boldsymbol{\rho}}$$

şi, întrucât $\mathbf{r}$ şi $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ sunt netede, la fel este şi $\boldsymbol{\rho}$.

Pentru a verifica echivalenţa condiţiilor de regularitate pentru $\boldsymbol{\rho}$ şi $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$, considerăm componentele drumului $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$:

$$\tilde{\boldsymbol{\rho}} = (u(t), v(t)).$$

Atunci egalitatea (4.4.1) devine

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)).$$

Diferenţiind această relaţie, obţinem

$$\boldsymbol{\rho}'(t) = \mathbf{r}'_{\mathbf{u}} \cdot u'(t) + \mathbf{r}'_{\mathbf{v}} \cdot v'(t).$$

Cum vectorii $\mathbf{r}'_{\mathbf{u}}$ şi $\mathbf{r}'_{\mathbf{v}}$ nu sunt coliniari (deoarece suprafaţa, ca de obicei, se presupune a fi regulară), din relaţia precedentă rezultă că $\boldsymbol{\rho}'(t) = 0$ dacă şi numai dacă $u'(t) = 0$ şi $v'(t) = 0$, adică dacă şi numai dacă $\tilde{\boldsymbol{\rho}}'(t) = 0$. $\square$

Definiţie. Curba parametrizată $\tilde{\boldsymbol{\rho}}(t)$ pe domeniul U se numeşte *reprezentarea locală* a curbei parametrizate $\boldsymbol{\rho}(t)$ în parametrizarea locală $(U, \mathbf{r})$, iar ecuaţiile

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

se numesc *ecuaţiile locale* ale lui $\boldsymbol{\rho}(t)$ în parametrizarea considerată.

Exemplu. Fie $(U, \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v))$ o parametrizare locală a lui S şi $(u_0, v_0) \in U$. Considerăm, în $\mathbf{r}(U) \subset S$, drumurile definite de ecuaţiile locale

$$\begin{cases} u = u_0 + t \\ v = v_0 \end{cases} \tag{4.4.2}$$

şi

$$\begin{cases} u = u_0 \\ v = v_0 + t \end{cases} \tag{4.4.3}$$

Este uşor de constatat că suporturile acestor două drumuri sunt situate, într-adevă, pe S (mai precis, chiar în $\mathbf{r}(U)$). Prin fiecare $\mathbf{r}(u_0, v_0) \in \mathbf{r}(U)$ trec exact două astfel de curbe, câte una de fiecare tip. Aceste curbe se numesc se numesc *linii de coordonate sau curbe de coordonate* pe suprafaţa S, în parametrizarea locală $(U, \mathbf{r})$.

4.5 Spaţiul vectorial tangent, planul tangent şi normala la o suprafaţă

Să notăm, pentru orice $a \in \mathbb{R}^3$, cu R^3_a spaţiul vectorilor legaţi cu originea în a. Acesta este, în mod evident, un spaţiu vectorial de dimensiune 3, izomorf în mod natural cu $\mathbb{R}^3$.

Definiţia 4.5.1. Un vector $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3_a$ se numeşte *vector tangent* la suprafaţa S în punctul a dacă există o curbă parametrizată $(I, \boldsymbol{\rho}(t))$ pe S şi un $t_0 \in I$ astfel încât $\boldsymbol{\rho}(t_0) = a$ şi $\boldsymbol{\rho}'(t_0) = \mathbf{h}$. Astfel, un vector tangent la o suprafaţă este, pur şi simplu, un vector tangent la o curbă de pe suprafaţă.

Vom nota cu $T_a S$ mulţimea vectorilor tangenţi la suprafaţa S în $a \in S$. Următoarea lemă este trivială, dar va juca un rol esenţial în cele ce urmează.

Lemă. *Fie $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(t)$ o curbă parametrizată pe S, dată prin ecuaţiile locale $u = u(t)$, $v = v(t)$, faţă de o parametrizare locală $(U, \mathbf{r})$ a lui S. Atunci avem relaţia*

$$\boldsymbol{\rho}'(t) = u'(t)\mathbf{r}'_{\mathbf{u}}(u(t), v(t)) + v'(t)\mathbf{r}'_{\mathbf{v}}(u(t, v(t)). \tag{4.5.1}$$

Demonstraţie. Pur şi simplu derivăm relaţia $\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ în raport cu t. $\square$

Teorema 4.5.1. *Mulţimea* $T_a S$ *este un subspaţiu bidimensional al lui* $\mathbb{R}^3$. *Dacă* $(U, \mathbf{r})$ *este o parametrizare locală a lui* S*, iar* $a = \mathbf{r}(u_0, v_0)$*, atunci vectorii* $\mathbf{r}'_{\mathbf{u}}(u_0, v_0)$ *şi* $\mathbf{r}'_{\mathbf{v}}(u_0, v_0)$ *formează o bază a acestui subspaţiu, numită* baza naturală *sau* baza de coordonate *a spaţiului tangent.*

Demonstraţie. Fie $(U, \mathbf{r})$ o parametrizare locală a lui S, cu $a = \mathbf{r}(u_0, v_0)$. Dacă curba parametrizată $(I, \boldsymbol{\rho}(t))$ este pe suprafaţă şi $\boldsymbol{\rho}(t_0) = a$, atunci, micşorând, la nevoie, intervalul I, putem presupune că $\boldsymbol{\rho}(I) \subset \mathbf{r}(U)$, iar ecuaţiile sale locale, în această parametrizare a suprafeţei sunt $u = u(t), v = v(t)$. Atunci, din formula (4.5.1) rezultă că

$$\boldsymbol{\rho}'(t_0) = u'(t_0)\mathbf{r}'_{\mathbf{u}}(u_0, v_0) + v'(t_0)\mathbf{r}'_{\mathbf{v}}(u_0, v_0).$$

Reciproc, orice vector de forma

$$\mathbf{h} = \alpha \mathbf{r}'_{\mathbf{u}}(u_0, v_0) + \beta \mathbf{r}'_{\mathbf{v}}(u_0, v_0)$$

este tangent la curba parametrizată dată de ecuaţiile locale

$$\begin{cases} u = u_0 + \alpha t \\ v = v_0 + \beta t \end{cases},$$

care este o curbă pe S, ce trece prin a pentru $t = t_0$, de aceea $\mathbf{h} \in T_a S$. $\square$

Spaţiul vectorial $T_a S$ se numeşte *spaţiu tangent* la S în a. Aşa cum am menţionat mai sus, $\mathbb{R}^3_a$ este natural[2] izomorf cu $\mathbb{R}^3$. Bazându-ne pe acest izomorfism, putem considera, când ne convine, că $T_a S$ este, în fapt, un subspaţiu al lui $\mathbb{R}^3$ mai degrabă decât al lui $\mathbb{R}^3_a$. În acest caz, $T_a S$ este un *plan vectorial*, în sensul că el trece prin originea lui $\mathbb{R}^3$; atunci planul care trece prin a şi are pe $T_a S$ ca plan director (adică planul care trece prin a şi este paralel cu $T_a S$), se numeşte *planul tangent* la S în punctul a şi se notează cu $\Pi_a S$.

Dacă $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ este o parametrizare locală a suprafeţei S, iar $a = \mathbf{r}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0) \in S$, atunci, în mod clar, ecuaţia planului tangent la S în a trebuie să fie

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0.$$

[2] În acest context, *natural* înseamnă că există un izomorfism care este independent de alegerea bazelor în cele două spaţii vectoriale.

Fie, acum, $(U, \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v))$ o parametrizare a lui S şi $(u_0, v_0) \in U$. Dacă modificăm argumentele cu $\Delta u = \alpha \Delta t$, $\Delta v = \beta \Delta t$, cu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fixate, atunci din formula lui Taylor rezultă că:

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) = \mathbf{r}(u_0, v_0) + \Delta t \cdot (\alpha \mathbf{r}'_{\mathbf{u}}(u_0, v_0) + \beta \mathbf{r}'_{\mathbf{v}}(u_0, v_0)) + \Delta t \cdot \boldsymbol{\varepsilon},$$

cu $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{\varepsilon} = 0$. Folosind această formulă, vom da o altă caracterizare a planului tangent. Fie Π un plan din $\mathbb{R}^3$, care trece prin $a = \mathbf{r}(u_0, v_0)$, d – distanţa de la punctul $\Delta a = \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$ la planul Π, iar h – distanţa dintre punctele a şi Δa.

Teorema 4.5.2. *Planul Π este planul tangent la suprafaţa S în punctul a dacă şi numai dacă pentru orice modificare a argumentelor de forma $\Delta u = \alpha \Delta t$, $\Delta v = \beta \Delta t$, cu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, avem*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{d}{h} = 0, \tag{4.5.2}$$

adică planul şi suprafaţa au un contact de ordinul întâi în a.

Demonstraţie. Fie $\mathbf{n}$ versorul normalei la planul Π,

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0).$$

Atunci $d = \Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}$, $h = \|\Delta \mathbf{r}\|$. Înlocuind $\Delta \mathbf{r}$ cu expresia sa, găsim:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{d}{h} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t \cdot (\alpha \mathbf{r}'_{\mathbf{u}}(u_0, v_0) + \beta \mathbf{r}'_{\mathbf{v}}(u_0, v_0) + \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{n}}{\|\alpha \mathbf{r}'_{\mathbf{u}}(u_0, v_0) + \beta \mathbf{r}'_{\mathbf{v}}(u_0, v_0) + \boldsymbol{\varepsilon}\|} =$$
$$= \pm \frac{(\alpha \mathbf{r}'_{\mathbf{u}}(u_0, v_0) + \beta \mathbf{r}'_{\mathbf{v}}(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{n}}{\|\alpha \mathbf{r}'_{\mathbf{u}}(u_0, v_0) + \beta \mathbf{r}'_{\mathbf{v}}(u_0, v_0)\|},$$

de aceea

$$\lim_{\Delta t \to 0} = 0 \iff (\alpha \mathbf{r}'_{\mathbf{u}}(u_0, v_0) + \beta \mathbf{r}'_{\mathbf{v}}(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{4.5.3}$$

Necesitatea. Dacă Π este planul tangent, atunci vectorii $\mathbf{r}'_{\mathbf{u}}$ şi $\mathbf{r}'_{\mathbf{v}}$, ca vectori directori ai planului Π, sunt perpendiculari pe $\mathbf{n}$, de aceea relaţia (4.5.3) este verificată.
Suficienţa. Să presupunem, acum, că (4.5.3) este verificată. Alegând $\alpha = 1$, $\beta = 0$, obţinem $\mathbf{r}'_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = 0$. În acelaşi mod, pentru $\alpha = 0, \beta = 1$, se obţine $\mathbf{r}'_{\mathbf{v}} \times \mathbf{n} = 0$. Astfel, $\mathbf{n}$ este ortogonal la planul tangent, adică Π este chiar planul tangent. $\square$

Definiţia 4.5.2. Dreapta care trece printr-un punct al suprafeţei şi este perpendiculară pe planul tangent la suprafaţă în acel punct se numeşte *normală la suprafaţă* în punctul considerat.

Astfel, dacă $(U, \mathbf{r})$ este o parametrizare a suprafeţei în jurul punctului $a = \mathbf{r}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0) \in S$, atunci un vector director al normalei la suprafaţă va fi $\mathbf{r}_\mathbf{u}^{'}(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_\mathbf{v}^{'}(u_0, v_0)$, ceea ce înseamnă că ecuaţiile normalei în punctul a vor fi:

$$\frac{X - x_0}{\begin{vmatrix} y_u'(u_0, v_0) & z_u'(u_0, v_0) \\ y_v'(u_0, v_0) & z_v'(u_0, v_0) \end{vmatrix}} = \frac{Y - y_0}{\begin{vmatrix} z_u'(u_0, v_0) & x_u'(u_0, v_0) \\ z_v'(u_0, v_0) & x_v'(u_0, v_0) \end{vmatrix}} = \frac{Z - z_0}{\begin{vmatrix} x_u'(u_0, v_0) & y_u'(u_0, v_0) \\ x_v'(u_0, v_0) & y_v'(u_0, v_0) \end{vmatrix}}. \tag{4.5.4}$$

Pentru a determina planul tangent şi normala la o suprafaţă dată printr-o reprezentare implicită, următorul rezultat este foarte util.

Teorema 4.5.3. *În punctul* (x_0, y_0, z_0) *al suprafeţei date prin ecuaţia*

$$F(x, y, z) = 0$$

vectorul grad $F_0 = \{F_x'(x_0, y_0, z_0), F_y'(x_0, y_0, z_0), F_z'(x_0, y_0, z_0)\}$ *este perpendicular pe planul tangent la suprafaţă în acest punct.*

Demonstraţie. Fie $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ o parametrizare locală a suprafeţei în jurul punctului $(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{r}(u_0, v_0)$. Atunci avem identitatea

$$F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = 0,$$

de unde, prin diferenţiere, obţinem

$$\begin{cases} \underline{0} = F_u' = F_x' \cdot x_u' + F_y' \cdot y_u' + F_z' \cdot z_u' \equiv \underline{\operatorname{grad} F \cdot \mathbf{r}_\mathbf{u}^{'}} \\ \underline{0} = F_v' = F_x' \cdot x_v' + F_y' \cdot y_v' + F_z' \cdot z_v' \equiv \underline{\operatorname{grad} F \cdot \mathbf{r}_\mathbf{v}^{'}} \end{cases},$$

adică grad $F \perp L(\mathbf{r}_\mathbf{u}^{'}, \mathbf{r}_\mathbf{v}^{'}) \equiv T_{(x_0, y_0, z_0)} S$. □

Consecinţa 1. *Ecuaţia planului tangent la suprafaţa dată prin ecuaţia implicită* $F(x, y, z) = 0$ *în punctul* (x_0, y_0, z_0) *are forma*

$$(X - x_0) F_x'(x_0, y_0, z_0) + (Y - y_0) F_y'(x_0, y_0, z_0) + (Z - z_0) F_z'(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

în timp ce ecuaţiile normalei la suprafaţă în acelaşi punct sunt

$$\frac{X - x_0}{F_x'(x_0, y_0, z_0)} = \frac{Y - y_0}{F_y'(x_0, y_0, z_0)} = \frac{Z - z_0}{F_z'(x_0, y_0, z_0}.$$

Consecinţa 2. *Pentru orice punct a al sferei S_R^2 spaţiul tangent $T_a S_R^2$ este perpendicular pe raza vectoare a punctului a.*

Demonstraţie. Sfera S_R^2 poate fi descrisă prin ecuaţia

$$F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

de unde rezultă că

$$\mathrm{grad}\, F = 2\{x, y, z\} = 2\mathbf{a},$$

de aceea raza vectoare este paralelă cu gradientul funcţiei F, deci este perpendiculară pe spaţiul tangent. □

4.6 Orientarea suprafeţelor

Definiţia 4.6.1. O *orientare* a suprafeţei S este o alegere a unei orientări în fiecare spaţiu tangent $T_a S$, adică o alegere a versorului normalei la $T_a S$, $\mathbf{n}(a)$. Se presupune, în acest context, că funcţia vectorială $\mathbf{n} : S \to \mathbb{R}^3$, $a \to \mathbf{n}(a)$ este continuă. Suprafeţele pe care este posibilă definirea unei orientări se numesc *orientabile*, în timp ce acelea pe care a fost aleasă o orientare se numesc *orientate*.

Exemple. a) Putem defini o orientare pe sfera S_R^2 folosind versorul normalei exterioare. Nu e dificil de constatat că dacă $\mathbf{a}$ este raza vectoare a punctului $a \in S_R^2$, atunci $\mathbf{n}(a) = \frac{1}{R}\mathbf{a}$. De aceea, aplicaţia

$$\mathbf{n} : S_R^2 \to \mathbb{R}^3,$$

care defineşte orientarea sferei poate fi reprezentată ca o compunere de aplicaţii continue:

$$S_R^2 \xrightarrow{i} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\frac{1}{R}} \mathbb{R}^3 : a \longrightarrow \mathbf{a} \longrightarrow \frac{1}{R}\mathbf{a}.$$

b) Fie S o suprafaţă simplă, cu parametrizarea globală $(U, \mathbf{r})$. Această suprafaţă poate fi orientată folosind câmpul de vectori

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{r}_\mathbf{u}' \times \mathbf{r}_\mathbf{v}'}{\|\mathbf{r}_\mathbf{u}' \times \mathbf{r}_\mathbf{v}'\|}.$$

c) Fie S o suprafaţă dată prin ecuaţia implicită $F(x, y, z) = 0$. Atunci suprafaţa poate fi orientată prin câmpul vectorial gradient:

$$\mathbf{n}(x, y, z) = \frac{\operatorname{grad} F}{\| \operatorname{grad} F \|}.$$

Dacă orientarea unei suprafeţe S este dată de funcţia vectorială (câmpul de vectori) $\mathbf{n}(a)$, atunci câmpul vectorial $-\mathbf{n}(a)$ defineşte, de asemenea, o orientare pe S, numită orientarea *opusă* a suprafeţei, în raport cu orientarea dată de $\mathbf{n}$. Dacă suprafaţa orientabilă S este conexă, atunci orice orientare a lui S trebuie să coincidă cu una dintre cele două orientări menţionate. Într-adevăr, dacă $\mathbf{N}(a)$ este o orientare a suprafeţei S, atunci trebuie să avem $\mathbf{N}(a) = \lambda\, \mathbf{n}(a)$, unde λ este o funcţie continuă pe S, cu valori în mulţimea finită $\{-1, 1\}$, de aceea, dacă S este conexă, λ trebuie să fie o funcţie constantă. Astfel, o suprafaţă orientabilă are doar două orientări distincte. Desigur, dacă suprafaţa nu este conexă, atunci există mai multe orientări corespunzătoare la diferite combinaţii ale celor două orientări posibile pe fiecare componentă conexă a suprafeţei.

Observaţie. Nu orice suprafaţă este orientabilă. Considerăm, de exemplu, suportul suprafeţei parametrizate

$$\mathbf{r}(u, v) = (\cos u + v \cos \frac{u}{2} \cos u, \sin u + v \cos \frac{u}{2} \sin u, v \sin \frac{u}{2}),$$

cu $u, v \in \mathbb{R}$ (*banda lui Möbius*, vezi figura următoare). Vom arăta mai jos că S nu este orientabilă. (Are o singură faţă: este posibil să mişcăm în mod continuu originea versorului normalei de-a lungul unui drum închis pe S astfel încât după un tur complet versorul normalei să se transforme în opusul său.) De remarcat că S nu este simplă, după cum ar părea, deoarece $\mathbf{r}$ nu este o parametrizare, deoarece nu este un omeomorfism pe imagine.

Neorientabilitatea benzii lui Möbius. Considerăm două parametrizări locale pentru a descrie banda lui Möbius:

$$\mathbf{r} : T = \left\{ (s, t) \mid -\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2},\ 0 < t < 2\pi \right\},$$

$$\mathbf{r}(s, t) = \left(\cos t \left(1 + s \cos \frac{t}{2} \right), \sin t \left(1 + s \cos \frac{t}{2} \right), s \sin \frac{t}{2} \right)$$

şi

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\rho} : V = \left\{(u, v) \mid -\frac{1}{2} < u < \frac{1}{2}, -\pi < v < \pi\right\},\\ \boldsymbol{\rho}(u, v) = \left(\cos v\left(1 + u\cos\frac{v}{2}\right), \sin v\left(1 + u\cos\frac{v}{2}\right), u\sin\frac{v}{2}\right)\end{gathered}$$

Este uşor de constatat că domeniul difeomorfismului (schimbării de parametru) $\Phi = \boldsymbol{\rho}^{-1} \circ \mathbf{r}$ este mulţimea T^*, egală cu T, din care am scos segmentul $t = \pi$. Putem scrie Φ în mod explicit, ca $\Phi(s, t) \equiv (u, v) = (\varphi_1(s, t), \varphi_2(s, t))$, unde

$$u = \varphi_1(s, t) = s, \quad \forall (s, t) \in T^*$$

şi

$$v = \varphi_2(s, t) = \begin{cases} t & \text{if} \quad (s, t) \in T^*, 0 < t < \pi \\ \pi - t & \text{if} \quad (s, t) \in T^*, \pi < t < 2\pi \end{cases}.$$

Matricea Jacobi a aplicaţiei Φ este, după cum ne putem convinge cu uşurinţă,

$$J(\Phi)(s, t) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{if } 0 < t < \pi \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{if } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Suporturile lui $\mathbf{r}$ şi $\boldsymbol{\rho}$ sunt, în mod clar, orientabile, ca suprafeţe simple. Totuşi, admiţând că banda lui Möbius este orientabilă, cele două parametrizări nu definesc aceeaşi orientare pe ea, deoarece, aşa cum am văzut în calculul făcut mai sus, determinantul matricei Jacobi a schimbării de coordonate nu este întotdeauna pozitiv.

Pe de altă parte, cum suprafaţa noastră este conexă, dacă este orientabilă ea poate avea doar două orientări distincte, cu alte cuvinte orice parametrizare locală a lui S trebuie să fie pozitiv echivalentă fie cu $\mathbf{r}$, fie cu $\boldsymbol{\rho}$.

Să presupunem, acum, că S este orientabilă. Aceasta înseamnă că există o familie de parametrizări locale $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots$, care sunt două câte două pozitiv echivalente, iar suporturile lor acoperă S. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că pe suportul lui $\mathbf{r}$ toate aceste parametrizări sunt pozitiv echivalente cu $\mathbf{r}$. Ar trebui să existe o parametrizare locală ân familie astfel încât suportul său să intersecteze segmentul $t = 0$. Vom presupune că această parametrizare este $\mathbf{r}_1$. Putem presupune

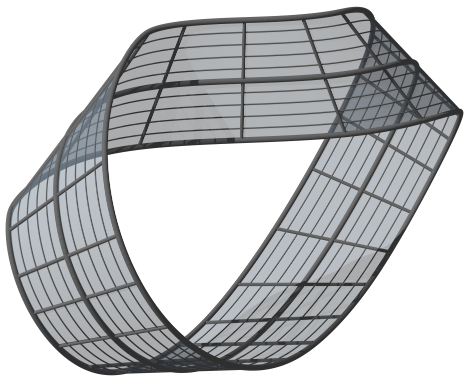


Figura 4.2 – Banda lui Möbius

că suportul lui $\mathbf{r}_1$ este inclus în suportul lui $\boldsymbol{\rho}$ (altfel, dacă este necesar, putem restrânge domeniul lui $\mathbf{r}_1$). Rezultă atunci că determinantul lui Jacobi al aplicaţiei $\boldsymbol{\rho}^{-1} \circ \mathbf{r}_1$ fie totdeauna pozitiv, fie întotdeauna negativ pe domeniul lui $\mathbf{r}_1$. Pe de altă parte, avem, în mod evident, din regula de diferenţiere a funcţiilor compuse, că

$$J(\boldsymbol{\rho}^{-1} \circ \mathbf{r}) = J(\boldsymbol{\rho}^{-1} \circ \mathbf{r}_1) J(\mathbf{r}_1^{-1} \circ \mathbf{r}),$$

de unde

$$\det J(\boldsymbol{\rho}^{-1} \circ \mathbf{r}) = \det J(\boldsymbol{\rho}^{-1} \circ \mathbf{r}_1) \det J(\mathbf{r}_1^{-1} \circ \mathbf{r}).$$

Acum, în membrul drept, ultimul determinant este întotdeauna pozitiv, deoarece am presupuse că cele două parametrizări sunt pozitiv echivalente. Primul determinant, din ipoteză, este fie peste tot pozitiv, fie peste tot negativ. Astfel, membrul drept are semn constant. Pe de altă parte, după cuma m văzut mai suys, membrul stâng are semne opuse de o parte şi de alta a segmentului $t = 0$, de unde contradicţia care demonstrează că banda lui Möbius nu este orientabilă.

În figura **??** arătăm cum se poate construi o bandă M"obius dintr-o fâşie de hârtie. Un alt exemplu de suprafaţă neorientabilă este aşa-numita *sticlă a lui Klein* (vezi figura **??**)

Definiţie. Fie S o suprafaţă orientată, cu orientarea $\mathbf{n}(a)$. O parametrizare locală $(U, \mathbf{r})$ a lui S se numeşte *compatibilă* cu orientarea $\mathbf{n}(a)$ dacă pentru orice punct $a = \mathbf{r}(u, v)$ avem

$$\mathbf{n}(a) = \frac{\mathbf{r}'_{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}'_{\mathbf{v}}}{\|\mathbf{r}'_{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}'_{\mathbf{v}}\|}$$

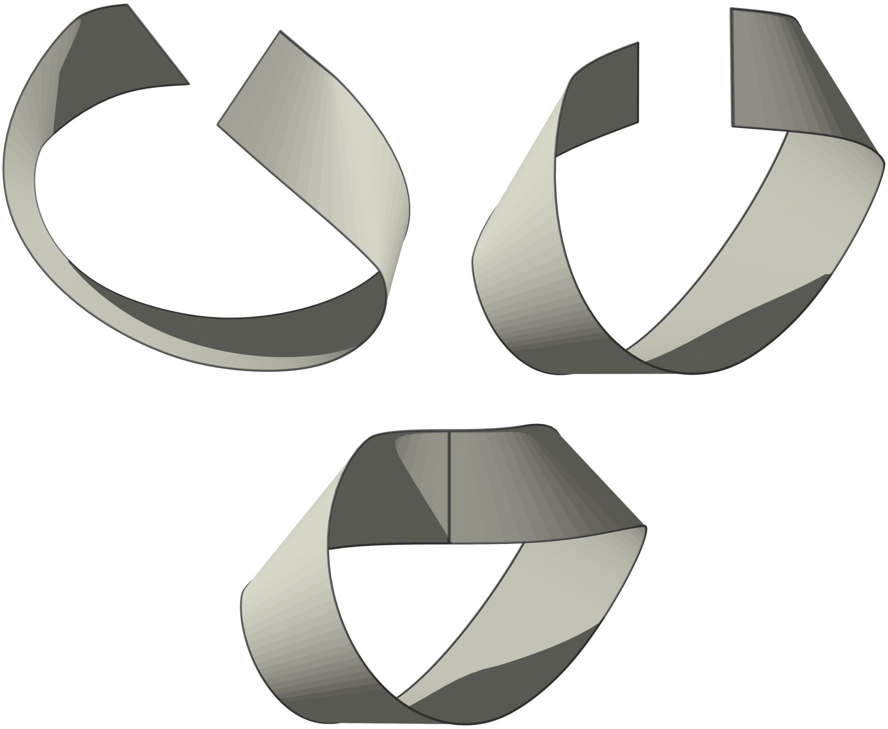


Figura 4.3 – Construiţi-vă propria bandă Möbius

sau, ceea ce este acelaşi lucru, dacă baza $\left\{\mathbf{r}'_{\mathbf{u}}, \mathbf{r}'_{\mathbf{v}}, \ \mathbf{n}(a)\right\}$ este directă.

4.7 Aplicaţii diferenţiabile pe o suprafaţă

Definiţia 4.7.1. Fie S o suprafaţă în $\mathbb{R}^3$. O aplicaţie $f : S \to \mathbb{R}^k$ se numeşte *diferenţiabilă* sau *netedă* dacă pentru orice parametrizare $(U, \mathbf{r})$ a lui S aplicaţia $f \circ \mathbf{r} : U \to \mathbb{R}^k$ este netedă. Aplicaţia $f_{\mathbf{r}} \equiv f \circ \mathbf{r}$ se numeşte *expresia lui f în coordonatele curbiliniare* (u, v) sau *reprezentarea locală* a lui f faţă de parametrizarea $(U, \mathbf{r})$.

Observaţii. 1. Putem defini în mod similar diferenţiabilitatea unei aplicaţii definite pe o submulţime deschisă a unei suprafeţe S.

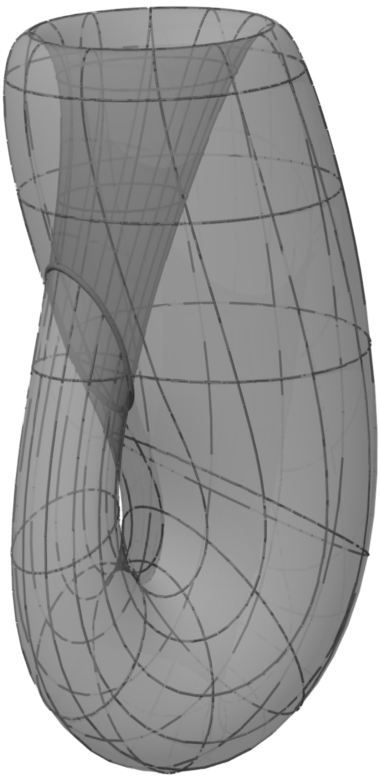


Figura 4.4 – Klein's bottle

2. Orice aplicaţie diferenţiabilă $f : S \to \mathbb{R}^k$ este continuă, întrucât, local, ea poate fi scrisă ca o compunere de aplicaţii continue: $f = f \circ (\mathbf{r} \circ \mathbf{r}^{-1}) = (f \circ \mathbf{r}) \circ \mathbf{r}^{-1} = f_{\mathbf{r}} \circ \mathbf{r}^{-1}$.

Exemple. a) Orice aplicaţie constantă $f : S \to \mathbb{R}^k : a \to A_0$, $A_0 \in \mathbb{R}^k$ este netedă, deoarece reprezentarea sa locală în raport cu orice parametrizare locală a lui S este, de asemenea, o aplicaţie constantă, deci diferenţiabilă.

b) Dacă $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^k$ este o aplicaţie netedă, atunci, pentru orice suprafaţă S aplicaţia $f = F|_S : S \to \mathbb{R}^k$ este o aplicaţie netedă. Într-adevăr, pentru orice parametrizare locală $(U, \mathbf{r})$ a lui S reprezentarea locală a lui f este $f_{\mathbf{r}} = F \circ \mathbf{r}$, unde F şi $\mathbf{r}$ sunt aplicaţii netede, în sensul obişnuit. În particular, proiecţiile ortogonale ale unei suprafeţe S pe axele de coordonate şi planele de coordonate sunt, toate, aplicaţii netede.

c) Incluziunea $i : S \to \mathbb{R}^3 : a \to a$ este nedetă, întrucât, pentru orice parametrizare locală $(U, \mathbf{r})$ a lui S, reprezentarea locală a lui i este $i_\mathbf{r} = i \circ \mathbf{r} = \mathbf{r}$. (De fapt, i este restricţia aplicaţiei identice, $1_{\mathbb{R}^3}$ şi, de aceea, putem utiliza şi exemplul precedent).

În aparenţă, este destul de dificil să verificăm dacă o aplicaţie definită pe o suprafaţă este netedă, deoarece trebuie să verificăm netezimea reprezentărilor sale locale în raport cu *toate* parametrizările locale ale suprafeţei care sunt, fireşte, în număr infinit. Din fericire, după cum arată următoarea teoremă, este suficient să luăm doar anumite parametrizări locale, astfel încât domeniile lor să acopere întreaga suprafaţă. În particular, dacă suprafaţa este simplă, este suficient să verificăm pentru o parametrizare globală.

Teorema 4.7.1. *O aplicaţie $f : S \to \mathbb{R}^k$ este netedă dacă şi numai dacă pentru orice punct $a \in S$ există o parametrizare locală $(U, \mathbf{r})$ a suprafeţei S cu $a \in \mathbf{r}(U)$, astfel încât reprezentarea locală $f_\mathbf{r} = f \circ \mathbf{r} : U \to \mathbb{R}^k$ să fie netedă.*

Demonstraţie. Necesitatea este evidentă, deoarece, dacă f este netedă, atunci reprezentarea sa locală $f_\mathbf{r}$ este netedă pentru *orice* parametrizare locală $(U, \mathbf{r})$ a lui S.

Reciproc, să presupunem că $a \in S$ este un punct arbitrar al suprafeţei, iar $(U, \mathbf{r})$ este o parametrizare locală a lui S în jurul lui a, astfel încât reprezentarea locală $f_\mathbf{r} = f \circ \mathbf{r}$ să fie netedă. În mod evident, este suficient să demonstrăm că reprezentarea locală a lui f în orice altă parametrizare locală a lui S în jurul lui a este, de asemenea, netedă. Alegem, astfel, o altă parametrizare, $(U_1, \mathbf{r}_1)$, în jurul lui a şi fie $W = \mathbf{r}(U) \circ \mathbf{r}_1(U_1)$. Atunci, în $\mathbf{r}^{-1}(W) \subset U_1$, $f_{\mathbf{r}_1}$ poate fi scrisă sub forma

$$f_{\mathbf{r}_1} = f \circ \mathbf{r}_1 = f \circ (\mathbf{r} \circ \mathbf{r}^{-1}) \circ \mathbf{r}_1 = (f \circ \mathbf{r}) \circ (\mathbf{r}^{-1} \circ \mathbf{r}_1) = f_\mathbf{r} \circ (\mathbf{r}^{-1} \circ \mathbf{r}_1).$$

Întrucât atât $f_\mathbf{r}$ (din ipoteză) cât şi $\mathbf{r}^{-1} \circ \mathbf{r}_1$ (din teorema 4.3.1) sunt netede, rezultă că $f_{\mathbf{r}_1}$ este, de asemenea, netedă. □

Exemplu. Fie S o suprafaţă şi $(U, \mathbf{r})$ o parametrizare locală a lui S. Aşa cum am explicat mai devreme, aplicaţia $\mathbf{r}^{-1} : \mathbf{r}(U) \to \mathbb{R}^2$ nu este netedă, în sensul clasic. Motivul este că domeniul său de definiţie nu este o submulţime deschisă a unui spaţiu euclidian, de aceea noţiunea în sine nu are sens în această situaţie. Am arătat, de asemenea, că totuşi, local, $\mathbf{r}^{-1}$ este restricţia unei aplicaţii netede definite pe o submulţime deschisă a lui $\mathbb{R}^3$.

Noţiunea pe care tocmai am definit-o ne oferă cadrul natural pentru a discuta această aplicaţie importantă care, de fapt, asociază fiecărui punct de pe suprafaţă (situat în $\mathbf{r}(U)$, desigur), o pereche de coordonate. Într-adevăr, ca aplicaţie definită pe o submulţime deschisă a lui S, $\mathbf{r}^{-1}$ este netedă, după cum putem vedea cu uşurinţă, deoarece reprezentarea locală a lui $\mathbf{r}^{-1}$ în parametrizarea $(U, \mathbf{r})$ este

$$\left(\mathbf{r}^{-1}\right)_{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{r}^{-1} \circ \mathbf{r} = 1_U.$$

Următorul pas natural va fi să definim noţiunea de aplicaţie netedă între două suprafeţe, mai degrabă decât între o suprafaţă şi un spaţiu euclidian. Ideea este următoarea. Fie S_1, S_2 două suprafeţe în $\mathbb{R}^3$. Atunci orice aplicaţie $F : S_1 \to S_2$ poate fi privită ca o aplicaţie $F : S_1 \to \mathbb{R}^3$. Mai precis, putem asocia lui F aplicaţia $i \circ F : S \to \mathbb{R}^3$, unde $i : S_2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ este incluziunea.

Definiţia 4.7.2. Fie $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ două suprafeţe. O aplicaţie $F : S_1 \to S_2$ se numeşte *netedă* dacă aplicaţia $F_1 = i \circ F : S_1 \to \mathbb{R}^3$ este netedă.

Observaţii. 1. Este uşor de constatat că orice aplicaţie netedă între două suprafeţe este continuă.

2. Fie $S_1 \subset \mathbb{R}^3$ o suprafaţă şi $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – un difeomorfism. Atunci $S_2 = G(S_1)$ este, de asemenea, o suprafaţă, în timp ce aplicaţia $G|_{S_1} : S_1 \to S_2$ este netedă.

3. Fie $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ două suprafeţe şi $F : S_1 \to S_2$ o aplicaţie. Atunci F este netedă dacă şi numai dacă pentru orice $a \in S_1$, orice parametrizare locală $(U_1, \mathbf{r}_1)$ a lui S_1 în jurul lui a şi orice parametrizare locală $(U_2, \mathbf{r}_2)$ a lui S_2 în jurul lui $F(a)$, aplicaţia

$$F_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} \equiv \mathbf{r}_2^{-1} \circ F \circ \mathbf{r}_1 : U_1 \to U_2$$

este netedă (în sensul obişnuit). $F_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2}$ se numeşte *reprezentarea locală* a lui F în raport cu parametrizările locale $(U_1, \mathbf{r}_1)$ şi $(U_2, \mathbf{r}_2)$.

Definiţia 4.7.3. O aplicaţie $F : S_1 \to S_2$ se numeşte *difeomorfism* dacă F este bijectivă şi atât F cât şi F^{-1} sunt aplicaţii netede.

4.8 Diferenţiala unei aplicaţii netede între suprafeţe

Noţiunea de aplicaţie netedă între suprafeţe este o generalizare naturală a noţiunii de aplicaţie netedă mulţimi deschise din spaţii euclidiene. Acelaşi lucru ar trebui să se întâmple îi cu noţiunea de diferenţială. Vom scoate în evidenţă, de aceea, o proprietate a diferenţialei unei aplicaţii netede între spaţii euclidiene care va fi folosită pentru construirea generalizării pe care o căutăm.

Fie $G : B \to \mathbb{R}^3$ o aplicaţie netedă, cu $B \subset \mathbb{R}^3$ – o mulţime deschisă, iar

$$G(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z), g_2(x, y, z)).$$

Atunci, pentru orice punct $a = (x, y, z) \in B$, diferenţiala lui G în a,

$$d_a G : \mathbb{R}^3_a \to \mathbb{R}^3_{G(a)}$$

este o aplicaţie liniară, a cărei matrice este matricea Jacobi

$$\left.\frac{D(g_1, g_2, g_3)}{D(x, y, z)}\right|_{(x_0, y_0, z_0)} = (\alpha_{ij}),\ 1 \le i, j \le 3,$$

unde

$$\alpha_{ij} = \partial_i g_i(x_0, y_0, z_0).$$

Pentru orice vector $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3_a$, de $\{h_1, h_2, h_3\}$, vectorul $d_a G(\mathbf{h})$ are componentele

$$\left\{\sum_{j=1}^{3} \alpha_{1j} h_j, \sum_{j=1}^{3} \alpha_{2j} h_j, \sum_{j=1}^{3} \alpha_{3j} h_j\right\}.$$

Să presupunem acum că vectorul $\mathbf{h}$ este tangent la curba parametrizată $\boldsymbol{\rho}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ în punctul $t = t_0$, adică $\mathbf{h} = \boldsymbol{\rho}'(t_0)$. Vom demonstra că vectorul $d_a G(\mathbf{h})$ este vectorul tangent la curba parametrizată $(G \circ \boldsymbol{\rho})(t)$ în $t = t_0$. În acest scop, diferenţiem relaţia

$$(G \circ \boldsymbol{\rho})(t) = (g_1(x(t), y(t), z(t)), g_2(x(t), y(t), z(t)), g_3(x(t), y(t), z(t)))$$

şi obţinem:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{G \circ \boldsymbol{\rho}})'(t_0) &= \left\{\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial g_1}{\partial x^k}(x_0, y_0, z_0) h_k, \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial g_2}{\partial x^k}(x_0, y_0, z_0) h_k, \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial g_3}{\partial x^k}(x_0, y_0, z_0) h_k\right\} = \\ &= \left\{\sum_{k=1}^{3} \alpha_{1k} h_k, \sum_{k=1}^{3} \alpha_{2k} h_k, \sum_{k=1}^{3} \alpha_{3k} h_k\right\},\end{aligned}$$

unde

$$\{h_1, h_2, h_3\} = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\} = \boldsymbol{\rho}'(t_0).$$

Astfel, diferenţiala $d_a G$ sociază vectorului tangent la drumul $\boldsymbol{\rho}(t)$ în $t = t_0$ vectorul tangent la drumul $G(\boldsymbol{\rho}(t))$ în $t = t_0$.

Fie acum $F : S_1 \to S_2$ o aplicaţie netedă între suprafeţele S_1 şi S_2 şi $a \in S_1$. Atunci fiecărui drum neted $(I, \boldsymbol{\rho})$ pe S_1 îi corespunde un drum neted $(I, F \circ \boldsymbol{\rho})$ pe S_2. Dacă $\boldsymbol{\rho}(t)$ trece prin a pentru $t = t_0$, atunci drumul $F \circ \boldsymbol{\rho}(t)$ va trece prin $F(a)$ pentru $t = t_0$.

Definiţia 4.8.1. Aplicaţia $T_a S_1 \to T_{F(a)} S_2$, care asociază fiecărui vector tangent $\boldsymbol{\rho}'(t_0)$ la o curbă parametrizată $\boldsymbol{\rho}(t)$ pe S_1, cu $\boldsymbol{\rho}(t_0) = a$, vectorul tangent $(\overrightarrow{F \circ \boldsymbol{\rho}})'(t_0)$ la curba parametrizată $F \circ \boldsymbol{\rho}$ în $t = t_0$ se numeşte *diferenţiala* aplicaţiei netede $F : S_1 \to S_2$ în punctul a şi se notează cu $d_a F$.

Aici ar putea fi o mică dificultate. Puetem avea, pe S_1, două curbe diferite care să aibă acelaşi vector tangent într-un punct de contact. Cum imaginile a două curbe parametrizate prin F sunt, în general, distincte, s-ar putea întâmpla ca aceste imagini să nu aibă acelaşi vector tangent în punctul de contact. Ei bine, după cum ne vom convinge imediat, aceasta nu se întâmplaă. Într-adevăr, fie $a \in S_1$ şi $(I, \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(t))$, $(I_1, \boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_1(s))$ – două curbe parametrizate pe S_1 astfel încât t $\boldsymbol{\rho}(t_0) = \boldsymbol{\rho}_1(s_0) = a$ şi $\boldsymbol{\rho}'(t_0) = \boldsymbol{\rho}'_1(s_0)$. Alegem o parametrizare locală arbitrară $(U, \mathbf{r})$ pe S_1, în jurul lui a. Cum suntem interesaţi numai în fenomenele locale care se petrec în jurul lui a, putem presupune, fără a reduce generalitatea, că $\boldsymbol{\rho}(I) \subset \mathbf{r}(U)$ şi $\boldsymbol{\rho}_1(I_1) \subset \mathbf{r}(U)$. Să presupunem că ecuaţiile locale ale curbelor în parametrizarea $(U, \mathbf{r})$ sunt

$$(\boldsymbol{\rho}) \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases},$$

respectiv

$$(\boldsymbol{\rho}_1) \begin{cases} u = u_1(s) \\ v = v_1(s) \end{cases}.$$

Atunci vectorii $\boldsymbol{\rho}'(t_0)$ şi $\boldsymbol{\rho_1}'(s_0)$ au, în baza naturală $\{\mathbf{r}'_\mathbf{u}, \mathbf{r}'_\mathbf{v}\}$ expresiile

$$\boldsymbol{\rho}'(t_0) = \{u'(t_0), v'(t_0)\}$$
$$\boldsymbol{\rho_1}'(s_0) = \{u'_1(s_0), v'_1(s_0)\}.$$

Mai mult, în parametrizarea aleasă,

$$(F \circ \boldsymbol{\rho})(t) = F_{\mathbf{r}}(u(t), v(t))$$
$$(F \circ \boldsymbol{\rho}_1)(s) = F_{\mathbf{r}}(u_1(s), v_1(s)),$$

cu $F_{\mathbf{r}} = F \circ \mathbf{r}$. Astfel,

$$(\overrightarrow{F \circ \boldsymbol{\rho}})(t_0) = \frac{d}{dt}(F_{\mathbf{r}}(u(t), v(t)))(u_0, v_0) = \overrightarrow{(F_{\mathbf{r}})'_u}(u_0, v_0)u'(t_0) + \overrightarrow{(F_{\mathbf{r}})'_v}(u_0, v_0)v'(t_0)$$
$$(\overrightarrow{F \circ \boldsymbol{\rho}_1})(s_0) = \frac{d}{ds}(F_{\mathbf{r}}(u(s), v(s)))(u_0, v_0) = \overrightarrow{(F_{\mathbf{r}})'_u}(u_0, v_0)u'_1(s_0) + \overrightarrow{(F_{\mathbf{r}})'_v}(u_0, v_0)v'_1(s_0).$$

Acum, întrucât $\boldsymbol{\rho}'(t_0) = \boldsymbol{\rho_1}'(s_0)$, rezultă că

$$(\overrightarrow{F \circ \boldsymbol{\rho}})'(t_0) = (\overrightarrow{F \circ \boldsymbol{\rho}_1})'(s_0),$$

adică definiţia lui F are sens.

Teoremă. *Aplicaţia $dF : T_a S_1 \to T_{F(a)} S_2$ este liniară.*

Demonstraţie. Din calculul de mai sus rezultă imediat că dacă un vector $\mathbf{h} \in T_a S_1$ are, în baza naturală $\{\mathbf{r}'_{\mathbf{u}}, \mathbf{r}'_{\mathbf{v}}\}$ a spaţiului vectorial $T_a S_1$, componentele $\{h_1, h_2\}$, atunci

$$d_a F(\mathbf{h}) = \overrightarrow{F'_{\mathbf{r}u}}(u_0, v_0)h_1 + \overrightarrow{F'_{\mathbf{r}v}}(u_0, v_0)h_2, \tag{4.8.1}$$

de unde rezulă liniaritatea. □

Exemplu. Fie S_1, S_2 două suprafeţe în $\mathbb{R}^3$, $D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un difeomorfism astfel încât $D(S_1) = S_2$, $F = D_{S_1} : S_1 \to S_2$, $a \in S \subset \mathbb{R}^3$. Atunci avem

$$d_a F = d_a D|_{T_a S_1}, \tag{4.8.2}$$

unde $d_a D : \mathbb{R}^3_a \to \mathbb{R}^3_{D(a)}$ este diferenţiala aplicaţiei D în a. În particular, fie S^2_R şi $S^2_{\mathbf{r}}$ sferele de raze R, respectiv r, cu centrele în origine şi $D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \to \frac{r}{R}(x, y, z)$ – o omotetie, care este, în mod evident, un difeomorfism astfel încât $D(S^2_R) = S^2_r$. Atunci, pentru aplicaţia $F = D|_{S^2_R} : S^2_R \to S^2_r$, avem $d_a F(\mathbf{h}) = \frac{r}{R}\mathbf{h}$.

4.9 Aplicaţia sferică şi operatorul de formă al unei suprafeţe

Fie $S \subset \mathbb{R}^3$ o suprafaţă orientată şi S^2 – sfera unitate cu centrul în origine. Dacâ orientarea lui S este dată de versorul nmalor $\mathbf{n}(a)$, $a \in S$, atunci putem construi o aplicaţie $\Gamma : S \to S^2$, care asociază fiecărui $a \in S$ punctul de pe S^2 care are raza vectoare $\boldsymbol{\Gamma}(a) = \mathbf{n}(a)$. Aplicaţia Γ se numeşte *aplicaţia sferică* a suprafeţei S. Această aplicaţie joacă un rol central în teoria suprafeţelor. Vom demonstra, mai întâi, că Γ este netedă:

Teorema 4.9.1. *Aplicaţia sferică $\Gamma : S \to S^2$ a unei suprafeţe orientate S pe sfera unitate S^2 este o aplicaţie netedă între suprafeţe.*

Demonstraţie. Fie $a \in S$. Alegem o parametrizare locală $(U, \mathbf{r})$ a suprafeţei S în jurul lui a, compatibilă cu orientarea.În mod clar, întrucât S este orientabilă, o astfel de parametrizare există întotdeauna. Într-adevăr, dacă alegem o parametrizare $(U_1, \mathbf{r}_1)$ care nu este compatibilă cu parametrizarea, adică avem

$$\frac{\mathbf{r}'_{1u} \times \mathbf{r}'_{1v}}{\|\mathbf{r}'_{1u} \times \mathbf{r}'_{1v}\|} = -\,\mathbf{n}(u, v),$$

atunci înlocuim domeniul U_1 cu U_1^-, simetricul lui U_1 în raport cu axa Ov, şi aplicaţia $\mathbf{r}_1(u, v)$ cu $\mathbf{r}_1^-(u, v) = \mathbf{r}_1(-u, v)$. Este uşor de văzut că perechea $(U_1^-, \mathbf{r}_1^-)$ este o parametrizare a suprafeţei, compatibilă cu orientarea.

Acum avem

$$(\Gamma \circ \mathbf{r})(u, v) = \Gamma(\mathbf{r}(u, v)) = \Gamma_{\mathbf{r}}(u, v) = \mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{r}'_{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}'_{\mathbf{v}}}{\|\mathbf{r}'_{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}'_{\mathbf{v}}\|}.$$

Astfel, reprezentarea locală a lui Γ este netedă, de aceea Γ însăşi este netedă. $\square$

Exemple. (i) Pentru un plan Π, aplicaţia sferică este constantă.

(ii) Pentru sfera S_R^2, aplicaţia $\Gamma : S_R^2 \to S$ are expresia $\Gamma(x, y, z) = \frac{1}{R}(x, y, z)$, cu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

După cum am văzut, spaţiul tangent la sferă, $T_{\Gamma(a)}S^2$, este perpendicular pe raza vectoare $\mathbf{n}(a)$ a punctului $\Gamma(a)$. Pe de altă parte, $\mathbf{n}(a)$ este perpendicular pe T_aS. Astfel, dacă identificăm $\mathbb{R}^3_a$ şi $\mathbb{R}^3_{\Gamma(a)}$ cu $\mathbb{R}^3$, atunci subspaţiile T_aS şi $T_{\Gamma(a)}S^2$ coincid. De aceea, ne putem gândi la diferenţiala $d_a\Gamma : T_aS \to T_{\Gamma(a)}S^2$ ca fiind, în fapt, un operator liniar $T_aS \to T_aS$.

Definiţia 4.9.1. Operatorul liniar $d_a\Gamma : T_aS \to T_aS$ se numeşte *operatorul de formă* al suprafeţei orientate S în punctul a şi se notează cu A sau cu A_a.

Observaţie. Nu există un acord general nici în ceea ce priveşte definiţia operatorului de formă, nici în privinţa numelui său. În unele cărţi, în definiţia operatorului de formă intră şi un semn minus. Uneori se numeşte *operatorul lui Weingarten*, sau, de asemenea, *operatorul principal sau fundamental*. Din punct de vedere istoric, este adevărat că Julius Weingarten a fost primul care a scris formulele de derivare pentru aplicaţia sferică (cu alte cuvinte, el este cel care a găsit derivatele parţiale ale versorului normalei la suprafaţă în funcţie de derivatele parţiale ale rrazei vectoare). Cu toate acestea, operatorul de formă, ca aplicaţie liniară, a fost introdus în geometria diferenţială de către geometrul italian Cesare Burali-Forti ([6]), în 1912, sub numele de *omografia fondamentale*, adică omografie fundamentală.

Exemplu. (i) Pentru un plan, operatorul de formă se anulează.

(ii) Pentru sferă, operatorul de formă este o omotetie.

Fie acum $(U, \mathbf{r})$ o parametrizare locală a lui S, compatibilă cu orientarea. Atunci, reprezentarea locală a aplicaţiei sferice Γ a lui S va fi dată de

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{r}_\mathbf{u}' \times \mathbf{r}_\mathbf{v}'}{\|\mathbf{r}_\mathbf{u}' \times \mathbf{r}_\mathbf{v}'\|},$$

de aceea, pentru operatorul de formă vom avea:

$$A(\mathbf{h}) = \mathbf{n}_u' h_1 + \mathbf{n}_v' h_2, \tag{4.9.1}$$

unde $\mathbf{h} \in T_{\mathbf{r}(u,v)}S$; (h_1, h_2) sunt componentele lui $\mathbf{h}$ faţă de baza naturală $\{\mathbf{r}_\mathbf{u}', \mathbf{r}_\mathbf{v}'\}$. În particular, avem

$$A(\mathbf{r}_\mathbf{u}') = \mathbf{n}_u', \ A(\mathbf{r}_\mathbf{v}') = \mathbf{n}_v'. \tag{4.9.2}$$

Teoremă. *Operatorul de formă este autoadjunct, adică, $\forall \mathbf{h}, \mathbf{p} \in T_aS$, avem*

$$A(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{p} = \mathbf{h} \cdot A(\mathbf{p}). \tag{4.9.3}$$

Demonstraţie. Este suficient să demonstrăm pentru vectorii $\mathbf{r}_\mathbf{u}'$ şi $\mathbf{r}_\mathbf{v}'$. Cazul $\mathbf{h} = \mathbf{p}$ este trivial, de aceea este suficient să verificăm că

$$A(\mathbf{r}_\mathbf{u}') \cdot \mathbf{r}_\mathbf{v}' = \mathbf{r}_\mathbf{u}' \cdot A(\mathbf{r}_\mathbf{v}'),$$

adică
$$\mathbf{n}'_u \cdot \mathbf{r}'_{\mathbf{v}} = \mathbf{r}'_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}'_v. \tag{4.9.4}$$
Pentru a demonstra acest fapt, plecăm de la egalităţile evidente:
$$\mathbf{r}'_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{*}$$
şi
$$\mathbf{r}'_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{**}$$
Diferenţiem (*) în raport cu u şi (**) în raport cu v şi obţinem
$$\begin{cases} \mathbf{r}''_{uv} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{r}'_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}'_u = 0 \\ \mathbf{r}''_{uv} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{r}'_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}'_v = 0 \end{cases}$$
de unde, scăzând, membru cu membru, cele două egalităţi, obţinem concluzia. □

Consecinţă. *În fiecare spaţiu tangent T_aS există o bază ortonormată formată din vectori proprii ai operatorului de formă A.*

Demonstraţie. Întrucât A este autoadjunct, cele două valori proprii ale sale, λ_1, λ_2 sunt reale. Dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2$, atunci vectorii proprii corespunzători lui λ_1 and λ_2 sunt ortogonali, deci este suficient să alegem câte un vector unitate în fiecare spaţiu propriu. Dacă $\lambda_1 = \lambda_2$, atunci A este o omotetie şi putem utiliza orice bază ortonormată a spaţiului tangent (deoarece, în acest caz, orice vector tangent este un vector propriu al operatorului A). □

4.10 Prima formă fundamentală a unei suprafeţe

Fie S o suprafaţă în $\mathbb{R}^3$. Atunci produsul scalar în $\mathbb{R}^3$ induce câte un produs scalar în fiecare $\mathbb{R}^3_a$ şi, prin urmare, induce, de asemenea, un produs scalar în fiecare spaţiu tangent T_aS, $a \in S$.

Definiţia 4.10.1. Prima formă fundamentală a unei suprafeţe S este, prin definiţie, funcţia φ_1, care asociază fiecărui $a \in S$ restricţia produsului scalar pe $\mathbb{R}^3_a$ la T_aS. Vom spune, de obicei, prin abuz de limbaj, că prima formă fundamentală este restricţia însăşi, dar trebuie să înţelegem ce se întâmplă cu adevărat. Astfel, pentru orice $a \in S$ şi orice $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in T_aS$, vom avea
$$\varphi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}. \tag{4.10.1}$$

Observaţie. În multe manuale, în special cele mai vechi, prima formă fundamentală nu este definită ca fiind restricţia produsului scalar la T_aS, ci mai degrabă ca fiind forma pătratică asociată acestei restricţii.

Dacă $(U, \mathbf{r})$ este o parametrizare locală a lui S, atunci pentru orice $(u, v) \in U$ spaţiul tangent $\mathbb{R}^2_{(u,v)}$ la domeniul U în punctul (u, v) poate fi identificat cu spaţiul $T_{\mathbf{r}(u,v)}S$, asociind vectorilor $\{1, 0\}$, $\{0, 1\}$, care formează o bază a lui $\mathbb{R}^2_{(u,v)}$, vectorii $\mathbf{r}'_\mathbf{u}(u, v)$ şi $\mathbf{r}'_\mathbf{v}(u, v)$. Este uşor de văzut că, de fapt, această identificare este chiar izomorfismul liniar $dr_{(u,v)} : \mathbb{R}^2_{(u,v)} \to T_{\mathbf{r}(u,v)}S$. Folosind această identificare, putem transforma prima formă fundamentală φ_1 a lui S pe domeniul U (care poate fi privit, de fapt, ca fiind o suprafaţă simplă, cu parametrizarea globală dată de incluziunea lui U în $\mathbb{R}^3$). Astfel, pentru orice $(u, v) \in U$, în spaţiul tangent $T_{\mathbf{r}(u,v)}U \equiv \mathbb{R}^2_{(u,v)}$ la domeniul U, produsul scalar a doi vectori este definit prin regula

$$\widetilde{\varphi}_1(\xi, \eta) = \varphi_1(dr_{(u,v)}(\xi), dr_{(u,v)}(\eta)) = dr_{(u,v)}(\xi) \cdot dr_{(u,v)}(\eta).$$

Este uţor de văzut că, prin construcţie, aplicaţia $dr_{(u,v)} : \mathbb{R}^2_{(u,v)} \to T_{\mathbf{r}(u,v)}S$ este o izometrie în raport cu produsele scalare $\widetilde{\varphi}_1$, respectiv φ_1. Introducem notaţiile

$$\begin{cases} E(u, v) = \mathbf{r}'_\mathbf{u}(u, v) \cdot \mathbf{r}'_\mathbf{u}(u, v) \\ F(u, v) = \mathbf{r}'_\mathbf{u}(u, v) \cdot \mathbf{r}'_\mathbf{v}(u, v) \\ G(u, v) = \mathbf{r}'_\mathbf{v}(u, v) \cdot \mathbf{r}'_\mathbf{v}(u, v) \end{cases}.$$

Atunci funcţiile E, F, G sunt netede pe U, în timp ce matricea $\mathcal{G} = \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$ este matricea produsului scalar φ_1 pe spaţiul tangent $T_{\mathbf{r}(u,v)}S$ în raport cu baza $\{\mathbf{r}'_\mathbf{u}(u, v), \mathbf{r}'_\mathbf{v}(u, v)\}$, dare este, de asemenea, matricea produsului scalar $\widetilde{\varphi}_1$ pe spaţiul tangent $\mathbb{R}^2_{(u,v)} = T_{(u,v)}U$ faţă de baza $\{\{1, 0\}, \{0, 1\}\}$.

Exemple. 1. Pentru planul Π, dat de parametrizarea globală $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0$, avem:

$$\begin{cases} \mathbf{r}'_\mathbf{u} = \mathbf{a} \\ \mathbf{r}'_\mathbf{v} = \mathbf{b} \end{cases} \qquad \text{deci} \qquad \begin{cases} E = \mathbf{a}^2 \\ F = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ G = \mathbf{b}^2 \end{cases}.$$

Dacă Π este planul de coordonate xOy, atunci putem pune $\mathbf{r}_0 = 0$, $\mathbf{a} = \boldsymbol{\imath}$, $\mathbf{b} = \boldsymbol{\jmath}$, de aceea, prima formă fundamentală are matricea $\mathcal{G} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Pentru sfera S^2_R, alegem parametrizarea locală $(U, \mathbf{r})$, cu
$$\mathbf{r}(u,v) = (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u),$$
şi $U = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Obţinem imediat că $E = R^2, F = 0, G = R^2\cos^2 u$, deci matricea primei forme fundamentale este dată de
$$\mathcal{G} = R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}$$

4.10.1 Primele aplicaţii

Lungimea unui segment de curbă pe o suprafaţă

Fie S o suprafaţă, $(U, \mathbf{r})$ – o parametrizare locală a lui S şi $(I, \boldsymbol{\rho})$ – o curbă parametrizată cu $\boldsymbol{\rho}(I) \subseteq \mathbf{r}(U)$, dată prin ecuaţiile locale $u = u(t), v = v(t)$. Atunci, în baza naturală, vectorul tangent al curbei $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\rho}'(t)$ are componentele $\{u'(t), v'(t)\}$ şi putem calcula lungimea sa folosind matricea $\mathcal{G}$. De aceea, avem pentru lungimea segmentului de pe curba $\boldsymbol{\rho}$ cuprins între t_1 şi t_2:
$$l_{t_1,t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \|\boldsymbol{\rho}'(t)\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E(t)u'^2 + 2F(t)u'v' + G(t)v'^2} dt,$$
unde
$$\begin{cases} E(t) = E(u(t), v(t)) \\ F(t) = F(u(t), v(t)) \\ G(t) = G(u(t), v(t)) \end{cases}.$$

Exemplu. Alegem, pe sfera S^2_R, curba dată prin ecuaţiile locale $u = 0, v = t$ (în parametrizarea descrisă în exemplul precedent), unde $t \in (0, 2\pi)$ (ecuatorul fără un punct). Aşa cum am văzut mai sus, prima formă fundamentală a sferei are matricea $\mathcal{G} = R^2 \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{smallmatrix}\right)$. Cum de-a lungul curbei avem $u = 0$, rezultă că $u'(t) = 0$, $v'(t) = 1$. Pe de altă parte, $\cos^2 u = \cos^2 0 = 1$, deci, de-a lungul curbei, matricea $\mathcal{G}$ va fi matricea identică, înmulţită cu R^2. Dacă vrem să calculăm, de exemplu, lungimea segmentului de curbâ dintre $t_1 = \frac{\pi}{2}$ şi $t_2 = \pi$, vom obţine
$$l_{\frac{\pi}{2},\pi} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{R^2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + R^2 \cdot 1} dt = R \cdot t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi R}{2},$$

ceea ce era de aşteptat (segmentul de curbă este un sfert dintr-un cerc mare de pe sferă).

Unghiul dintre două curbe pe o suprafaţă

Fie $(U, \mathbf{r})$ o parametrizare a suprafeţei S, $(I, \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(t))$, $(I_1, \boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_1(s))$ – două curbe pe S astfel încât $\boldsymbol{\rho}(I) \subset \mathbf{r}(U)$, $\boldsymbol{\rho}_1(I_1) \subset \mathbf{r}(U)$. Presupunem că suporturile celor două curbe se intersectează în $\mathbf{r}(u_0, v_0)$, adică există $t_0 \in I, s_0 \in I_1$ astfel încât:

$$\boldsymbol{\rho}(t_0) = \boldsymbol{\rho}_1(s_0) = \mathbf{r}(u_0, v_0).$$

Dacă ecuaţiile locale ale celor două curbe sunt

$$(\boldsymbol{\rho}) \begin{cases} u = u_1(t) \\ v = v_1(t) \end{cases},$$

respectiv

$$(\boldsymbol{\rho}_1) \begin{cases} u = u_2(s) \\ v = v_2(s) \end{cases},$$

atunci descompunerile vectorilor tangenţi în punctul de intersecţie, în raport cu baza naturală vor fi:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho}'(t_0) = \{u_1'(t_0), v_1'(t_0)\} \\ \boldsymbol{\rho}_1'(s_0) = \{u_2'(s_0), v_2'(s_0)\} \end{cases},$$

de aceea, cosinusul unghiului dintre curbe[3] în punctul de contact este, după cum se ştie,

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{\rho}'(t_0) \cdot \boldsymbol{\rho}_1'(s_0)}{\|\boldsymbol{\rho}'(t_0)\| \cdot \|\boldsymbol{\rho}_1'(s_0)\|} = \frac{Eu_1'u_2' + F(u_1'v_2' + u_2'v_1') + Gv_1'v_2'}{\sqrt{Eu_1'^2 + 2Fu_1'v_1' + Gv_1'^2} \cdot \sqrt{Eu_2'^2 + 2Fu_2'v_2' + Gv_2'^2}},$$

unde

$$\begin{cases} E = E(u_0, v_0) \\ F = F(u_0, v_0) \\ G = G(u_0, v_0) \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} u_1' = u_1'(t_0) \\ v_1' = v_1'(t_0) \\ u_2' = u_2'(s_0) \\ v_2' = v_2'(s_0) \end{cases}.$$

[3]Ne referim, desigur, la unghiul format de vectorii tangenţi la curbă.

Aria unei suprafeţe parametrizate

Fie $(U, \mathbf{r})$ o suprafaţă parametrizată. Există multe modalităţi de a introduce noţiunea de arie. Toate sunt mai mult sau mai puţin legate de calculul integral, de aceea nu vom intra aici în nici un fel de detaliu. În esenţă, ca şi în cazul figurilor geometrice plane, aria trebuie să fie o funcţie care să asocieze fiecărei suprafeţe parametrizate orientate un număr pozitiv, supus unor restricţii. Alegem, urmându-l pe Stoker, următoarele trei restricţii:

a) Aria trebuie să fie dată de o integrală de forma

$$A = \iint\limits_U f du dv,$$

unde f trebuie să depindă numai de $u, v, \mathbf{r}, \mathbf{r}'_{\mathbf{u}}, \mathbf{r}'_{\mathbf{v}}$ (nu trebuie să apară derivate de ordin mai înalt ale lui $\mathbf{r}$!).

b) Este invariantă relativ la deplasările planului şi la schimbările de parametri care păstrează orientarea.

c) Un pătrat de latură 1 are aria 1.

Se poate demonstra că singura formulă pentru arie care verifică cele trei axiome de mai sus este

$$A = \iint\limits_U \sqrt{EG - F^2} du dv \equiv \iint\limits_U \|\mathbf{r}'_{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}'_{\mathbf{v}}\| du dv. \tag{4.10.2}$$

Vom da o motivaţie euristică pentru formula (4.10.2). Aceasta nu trebuie luată ca o “demonstraţie”, nu pretindem că ar fi.

Abordarea “clasică”. Fie $(U, \mathbf{r})$ o suprafaţă parametrizată şi $D \subset U$ – o submulţime compactă a lui U astfel încât $\mathbf{r}(\partial U)$ să fie o curbă netedă pe porţiuni în $\mathbb{R}^3$. Vrem să definim *aria* lui $\mathbf{r}(D) \subset \mathbf{r}(U)$. Ideea de bază este aceea că noi avem deja o noţiune de arie pentru figuri *plane*, în particular pentru paralelograme. Astfel, fie $(u, v) \in D$ şi $M = \mathbf{r}(u, v)$. Prin M trec două linii de coordonate, câte una din fiecare familie. Fie $M_1 = \mathbf{r}(u + \Delta u, v)$, $M_2 = \mathbf{r}(u, v + \Delta v)$ două puncte de pe aceste linii, coerespunzătoare modificărilor parametrilor lui M cu Δu, respectiv Δv, şi $M' = \mathbf{r}(u + \Delta u, v + \Delta v)$. Dacă Δu şi Δv sunt suficient de mici, atunci proiecţia poligonului curbiliniu $MM_1M'M_2$ pe planul tangent la suprafaţă în punctul M este (cu aproximaţie, desigur), un paralelogram plan în planul tangent. Laturile acestui paralelogram sunt $\mathbf{r}'_{\mathbf{u}}\Delta u$ şi $\mathbf{r}'_{\mathbf{v}}\Delta v$, iar aria sa va fi, de aceea,

$$\Delta\sigma = \|\mathbf{r}'_{\mathbf{u}}\Delta u \times \mathbf{r}'_{\mathbf{v}}\Delta v\| = \|\mathbf{r}'_{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}'_{\mathbf{v}}\|\Delta u\Delta v = \sqrt{EG - F^2}\Delta u\Delta v,$$

unde, desigur, coeficienţii primei forme fundamentale au fost calculaţi în punctul M. Este natural, de aceea, să definim aria lui $\mathbf{r}(D)$ ca fiind

$$A = \lim_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \Sigma\Delta\sigma = \iint_D \sqrt{EG - F^2}dudv,$$

unde suma din termenul din mijloc se ia după toate micile paralelogramele curbilinii care acoperă $\mathbf{r}(D)$.

Observaţie. Ne-am putea aştepta să obţinem pentru aria unui domeniu de pe o suprafaţă o interpretare similară cu cea pe care am obţinut-o pentru lungimea unui segment de curbă. Anume, putem să discretizăm domeniul şi să considerăm imaginile punctelor selectate. Ele vor determina o suprafaţă poligonală înscrisă în suprafaţa noastră. Atunci putem considera că aria poligoanelor care alcătuiesc această suprafaţă poligonală tinde la zero şi să definim aria suprafeţei ca fiind limita la care tinde aria suprafeţei poligonale. Din nefericire, după cum arată un exemplu celebru al lui of H.A. Schwartz, abordarea aceasta nu funcţionează, deoarece limita nu este independentă de tipul de suprafeţe poligonale cu care se aproximează suprafaţa şi, în particular, pentru anumite "poligonalizări" ale suprafeţei, aria poate să fie infinită, iar pentru altele finită. Desigur, lucrurile se pot aranja cu un pic de grijă, dar acesta este un subiect care ţine mai mult de teoria integrării decât de geometria diferenţială, aşa că nu vom insista.

4.11 Matricea operatorului de formă în baza naturală

Fie $(U, \mathbf{r})$ o parametrizare locală a suprafeţei orientate S, compatibilă cu orientarea. Vom nota cu $\mathcal{A}$ matricea operatorului de formă A în raport cu baza naturală $\{\mathbf{r}'_{\mathbf{u}}, \mathbf{r}'_{\mathbf{v}}\}$. Întrucât, după cum am văzut mai devreme,

$$A(\mathbf{r}'_{\mathbf{u}}) = \mathbf{n}'_u, \; A(\mathbf{r}'_{\mathbf{v}}) = \mathbf{n}'_v,$$

avem

$$(\mathbf{n}_u \ \ \mathbf{n}'_v) = (\mathbf{r}'_\mathbf{u} \ \mathbf{r}'_\mathbf{v}) \cdot \mathcal{A}. \tag{4.11.1}$$

Înmulţim la stânga cu matricea $\begin{pmatrix} \mathbf{r}'_\mathbf{u} \\ \mathbf{r}'_\mathbf{v} \end{pmatrix}$ şi obţinem:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathbf{r}'_\mathbf{u} \\ \mathbf{r}'_\mathbf{v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{n}'_u & \mathbf{n}'_v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{r}'_\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}'_u & \mathbf{r}'_\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}'_v \\ \mathbf{r}'_\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}'_u & \mathbf{r}'_\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}'_v \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{r}'_\mathbf{u} \\ \mathbf{r}'_\mathbf{v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{r}'_\mathbf{u} & \mathbf{r}'_\mathbf{v} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}'_\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}'_\mathbf{u} & \mathbf{r}'_\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}'_\mathbf{v} \\ \mathbf{r}'_\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'_\mathbf{u} & \mathbf{r}'_\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'_\mathbf{v} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{G} \cdot \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

Introducem funcţiile

$$\begin{cases} L(u,v) = \mathbf{r}'_\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}'_u \\ M(u,v) = \mathbf{r}'_\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}'_v \\ N(u,v) = \mathbf{r}'_\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}'_v \end{cases}, \tag{4.11.2}$$

şi matricea $\mathcal{H}$, definită prin

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

Atunci ultima ecuaţie devine

$$\mathcal{H} = \mathcal{G} \cdot \mathcal{A}.$$

Întrucât produsul scalar pe $\mathbb{R}^3$ este nedegenerat, acest lucru rămâne valabil pentru restricţia sa la orice subspaţiu şi, drept consecinţă, matricea $\mathcal{G}$ este inversabilă. Dacă $\mathcal{G}^{-1}$ este inversa ei, atunci pentru matricea operatorului de formă obţinem

$$\mathcal{A} = \mathcal{G}^{-1} \cdot \mathcal{H}, \tag{4.11.3}$$

unde, după cum se poate vedea cu uşurinţă,

$$\mathcal{G}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Dacă facem calculele, obţinem:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ -FL + EM & -FM + EN \end{pmatrix} \tag{4.11.4}$$

Tot ce avem de făcut este să exprimăm cantităţile L, M, N în funcţie de derivatele funcţiei $\mathbf{r}$. În acest scop, diferenţiem relaţiile $\mathbf{r}_\mathbf{u}^{'} \cdot \mathbf{n} = 0$ şi $\mathbf{r}_\mathbf{v}^{'} \cdot \mathbf{n} = 0$ în raport cu u şi v şi obţinem:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{\mathbf{u}^2}^{''} \cdot n + \mathbf{r}_\mathbf{u}^{'} \cdot \mathbf{n}_u' = 0 \\ \mathbf{r}_{\mathbf{uv}}^{''} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{r}_\mathbf{u}^{'} \cdot \mathbf{n}_v' = 0 \\ \mathbf{r}_{\mathbf{uv}}^{''} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{r}_\mathbf{v}^{'} \cdot \mathbf{n}_u' = 0 \\ \mathbf{r}_{\mathbf{v}^2}^{''} \cdot n + \mathbf{r}_\mathbf{v}^{'} \cdot \mathbf{n}_v' = 0 \end{cases},$$

de unde obţinem pentru L, M, N expresiile:

$$\begin{cases} L = \mathbf{r}_\mathbf{u}^{'} \cdot \mathbf{n}_u' = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{\mathbf{u}^2}^{''} \\ M = \mathbf{r}_\mathbf{u}^{'} \cdot \mathbf{n}_v' = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{\mathbf{uv}}^{''} \\ N = \mathbf{r}_\mathbf{v}^{'} \cdot \mathbf{n}_v' = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{\mathbf{v}^2}^{''} \end{cases} \tag{4.11.5}$$

sau, ţinând cont de faptul că

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_\mathbf{u}^{'} \times \mathbf{r}_\mathbf{v}^{'}}{\|\mathbf{r}_\mathbf{u}' \times \mathbf{r}_\mathbf{v}'\|},$$

în timp ce

$$\|\mathbf{r}_\mathbf{u}^{'} \times \mathbf{r}_\mathbf{v}^{'}\| = H(= \sqrt{EG - F^2}),$$

$$\begin{cases} L = -\frac{1}{H}(\mathbf{r}_\mathbf{u}^{'}, \mathbf{r}_\mathbf{v}^{'}, \mathbf{r}_{\mathbf{u}^2}^{''}) \\ M = -\frac{1}{H}(\mathbf{r}_\mathbf{u}^{'}, \mathbf{r}_\mathbf{v}^{'}, \mathbf{r}_{\mathbf{uv}}^{''}) \\ N = -\frac{1}{H}(\mathbf{r}_\mathbf{u}^{'}, \mathbf{r}_\mathbf{v}^{'}, \mathbf{r}_{\mathbf{v}^2}^{''}) \end{cases}. \tag{4.11.6}$$

Exemplu. Pentru elicoidul

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = bv \end{cases}, \qquad (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad b > 0,$$

putem defini orientarea punând

$$\mathbf{n}(u, v) = \left\{ \frac{b \sin v}{\sqrt{b^2 + u^2}}, -\frac{b \cos v}{\sqrt{b^2 + u^2}}, \frac{u}{\sqrt{b^2 + u^2}} \right\}.$$

Se obţine, după un calcul simplu:

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^2 + u^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{\sqrt{b^2+u^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{b^2+u^2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{(b^2+u^2)^{3/2}} \\ \frac{b}{(b^2+u^2)^{3/2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

4.12 A doua formă fundamentală a unei suprafeţe orientate

Definiţia 4.12.1. A doua formă fundamentală a unei suprafeţe orientate S este aplicaţia care asociază fiecărui $a \in S$ aplicaţia $\varphi_2(a) : T_aS \times T_aS \to \mathbb{R}$ dată de

$$\varphi_2(\xi, \eta) = -\varphi_1(A(\xi), \eta), \quad \forall \xi, \eta \in T_aS. \tag{4.12.1}$$

Observaţie. Semnul minus din definiţia precedentă este o consecinţă a alegerii de semn pe care am făcut-o în definiţia operatorului de formă. Ni s-a părut natural să definim operatorul de formă ca fiind diferenţiala aplicaţiei sferice, mai degrabă decât opusul diferenţialei, dar atunci în definirea celei de-a doua forme fundamentale trebuie să introducem un semn minus suplimentar, ca să regăsim definiţia general acceptată a celei de-a doua forme fundamentale.

Propoziţia 4.12.1. *Pentru fiecare $a \in S$, $\varphi_2(a)$ este o formă biliniară simetrică.*

Demonstraţie. Luăm doi vectori tangenţi arbitrari $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in T_aS$ şi două numere reale oarecare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci avem, înainte de toate:

$$\varphi_2(\eta, \xi) = -\varphi_1(A(\eta), \xi) \underset{\text{autoadjunct}}{\overset{A}{=}} -\varphi_1(\eta, A(\xi)) \underset{\text{simetrică}}{\overset{\varphi_1}{=}} -\varphi_1(A(\xi), \eta) = \varphi_2(\xi, \eta),$$

ceea ce înseamnă că φ_2 este simetrrică. În virtutea simetriei, este suficient să demonstrăm liniaritatea doar în prima variabilă. Avem

$$\begin{aligned}\varphi_2(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2, \eta) &= -\varphi_1(A(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2), \eta) \underset{\text{linear}}{\overset{A}{=}} -\varphi_1(\alpha A(\xi_1) + \beta A(\xi_2), \eta) \underset{\text{bilinear}}{\overset{\varphi_1}{=}} \\ &\underset{\text{bilinear}}{\overset{\varphi_1}{=}} -\alpha\varphi_1(A(\xi_1), \eta) - \beta\varphi_1(A(\xi_2), \eta) = \alpha\varphi_2(\xi_1, \eta) + \beta\varphi_2(\xi_2, \eta),\end{aligned}$$

ceea ce demonstrează simetria în prima variabilă şi încheie demonstraţia. □

Fie $(U, \mathbf{r})$ o parametrizare locală a suprafeţei orientate S, compatibilă cu orientarea. Atunci matricea $[\varphi_2]$ a celei de-a doua forme fundamentale în raport cu baza canonică $\{\mathbf{r}_\mathbf{u}', \mathbf{r}_\mathbf{v}'\}$ are forma:

$$[\varphi_2] = \begin{pmatrix} \varphi_2(\mathbf{r}_\mathbf{u}', \mathbf{r}_\mathbf{u}') & \varphi_2(\mathbf{r}_\mathbf{u}', \mathbf{r}_\mathbf{v}') \\ \varphi_2(\mathbf{r}_\mathbf{v}', \mathbf{r}_\mathbf{u}') & \varphi_2(\mathbf{r}_\mathbf{v}', \mathbf{r}_\mathbf{v}') \end{pmatrix}.$$

Dar

$$\begin{cases} \varphi_2(\mathbf{r}_\mathbf{u}', \mathbf{r}_\mathbf{u}') = -\varphi_1(A(\mathbf{r}_\mathbf{u}'), \mathbf{r}_\mathbf{u}') = -\varphi_1(\mathbf{n}_u', \mathbf{r}_\mathbf{u}') = -\mathbf{n}_u' \cdot \mathbf{r}_\mathbf{u}' \\ \varphi_2(\mathbf{r}_\mathbf{u}', \mathbf{r}_\mathbf{v}') = \varphi_2(\mathbf{r}_\mathbf{v}', \mathbf{r}_\mathbf{u}') = -\mathbf{n}_u' \cdot \mathbf{r}_\mathbf{v}' = -\mathbf{n}_v' \cdot \mathbf{r}_\mathbf{u}' \;\; \varphi_2(\mathbf{r}_\mathbf{v}', \mathbf{r}_\mathbf{v}') = -\mathbf{n}_v' \cdot \mathbf{r}_\mathbf{v}' \end{cases},$$

şi, astfel, obţinem matricea

$$[\varphi_2] = -\begin{pmatrix} \mathbf{n}'_u \cdot \mathbf{r}'_{\mathbf{u}} & \mathbf{n}'_u \cdot \mathbf{r}'_{\mathbf{v}} \\ \mathbf{n}'_v \cdot \mathbf{r}'_{\mathbf{u}} & \mathbf{n}'_v \cdot \mathbf{r}'_{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \overset{\text{not.}}{=} \begin{pmatrix} D & D' \\ D' & D'' \end{pmatrix}.$$

Rezultă, în acest mod, că matricea celei de-a doua forme fundamentale în baza canonică nu este alta decât $-\mathcal{H}$. Astfel, pentru coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale în raport cu baza naturală avem

$$\begin{cases} D = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}''_{\mathbf{u}^2} \\ D' = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}''_{\mathbf{uv}} \\ D'' = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}''_{\mathbf{v}^2} \end{cases} \tag{4.12.2}$$

Observaţie. Cititorul trebuie să fie atent la notaţiile pentru coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale. Pentru ei se mai utilizează şi notaţia e, f, g. De asemenea, în unele cărţi, literele L, M, N sunt utilizate pentru a nota coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale înşişi. Notaţiile D, D', D'' sunt, de regulă, atribuite lui Gauss (în *Disquisitiones*). Trebuie, menţionat, totuşi, că pentru Gauss semnificaţia simbolurilor este puţin diferită: ele nu notează coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale, ci aceşti coeficienţi înmulţiţi cu $\sqrt{EG-F^2}$.

Exemplu. Pentru sfera $S = S_R^2$ avem, aşa cum am văzut mai devreme, $\mathbf{n} = \frac{1}{R}\{x, y, z\}$, de aceea, după cum ştim deja, operatorul de formă A este o omotetie de raport $1/R$, adică

$$A(\mathbf{p}) = \frac{1}{R}\mathbf{p}, \quad , \forall \mathbf{p} \in T_a S^2 R.$$

Astfel,

$$\varphi_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\varphi_1\left(\frac{1}{R}\mathbf{p}, \mathbf{q}\right) = -\frac{1}{R}\varphi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{R}\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}.$$

de aceea, pentru sferă, primele două forme fundamentale sunt proporţionale. În mod clar, acelaşi lucru este valabil şi pentru plan, când cea de-a doua formă fundamentală este identic nulă. Se poate demonstra că doar aceste două suprafeţe se bucură de această proprietate.

4.13 Curbura normală. Teorema lui Meusnier

Fie S o suprafaţă orientată şi $\mathbf{n}$ – versorul normalei. Considerăm o curbă parametrizată regulară, $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(t)$, situată pe S.

Definiţia 4.13.1. Proiecţia vectorului de curbură $\mathbf{k}(t)$ al curbei $\boldsymbol{\rho}$ (privită ca un scalar cu semn) pe $\mathbf{n}(\boldsymbol{\rho}(t))$ se numeşte *curbură normală* a curbei $\boldsymbol{\rho}(t)$ în t şi se notează cu $k_n(t)$.

Fie $\theta(t)$ unghiul dintre planul osculator la $\boldsymbol{\rho}(t)$ şi $\mathbf{n}(\boldsymbol{\rho}(t))$. Atunci, în mod clar,

$$k_n(t) = k(t) \cdot \cos\theta(t), \tag{4.13.1}$$

unde $k(t)$ este curbura curbei $\boldsymbol{\rho}(t)$.

Exemple. 1. Curbura normală a unei curbe plane este nulă (În acest caz, unghiul $\theta(t)$ este întotdeauna $\dfrac{\pi}{2}$, de aceea $\cos\theta(t) \equiv 0$).

2. Dacă suportul unei curbe parametrizate este situat pe o dreaptă, atunci curbura sa normală este egală cu zero, indiferent pe ce suprafaţă este situată curba, deoarece de data asta curbura curbei este cea care se anulează în mod identic.

Observaţie. Relaţia (4.13.1) are o interpretare geometrică simplă (teorema lui Meusnier): *centrul de curbură al unei curbe $\boldsymbol{\rho}$, situată pe o suprafaţă S, este proiecţia ortogonală pe planul osculator al centrului de curbură al secţiunii normale tangente la $\boldsymbol{\rho}$ în acel punct.*

Curbura normală a unei curbe de pe o suprafaţă se poate exprima cu uşurinţă dacă se cunosc cele două forme fundamentale ale suprafeţei. Într-adevăr, avem:

Teorema 4.13.1. *Curbura normală a unei curbe parametrizate regulare $\boldsymbol{\rho}(t)$, situate pe o suprafaţă orientată S, este dată de formula*

$$k_n(t) = \frac{\varphi_2(\boldsymbol{\rho}'(t), \boldsymbol{\rho}'(t))}{\varphi_1(\boldsymbol{\rho}'(t), \boldsymbol{\rho}'(t))}. \tag{4.13.2}$$

Demonstraţie. Aşa cum se întâmplă de multe ori în cazul curbelor parametrizate, demonstraţia este mai simplă pentru curbele parametrizate natural. Întrucât curbura oricărei curbe parametrizate regulare este invariantă faţă de o schimbare de parametru, putem înlocui curba $\boldsymbol{\rho}(t)$ cu o curbă parametrizată natural echivalentă cu ea, $\boldsymbol{\rho}_1(s)$, parametrul natural fiind lungimea arcului. Vectorul de curbură al curbei $\boldsymbol{\rho}_1(s)$ va fi

$\boldsymbol{\rho_1}''(s)$. Alegem o parametrizare locală $(U, \mathbf{r})$ a suprafeţei S, compatibilă cu orientarea, şi presupunem că $\boldsymbol{\rho}_1(s)$ are în această parametrizare ecuaţiile locale $u = u(s),\ v = v(s)$, adică $\boldsymbol{\rho}_1(s) = \mathbf{r}(u(s), v(s))$. Atunci

$$\boldsymbol{\rho_1}''(s) = \mathbf{r}''_{\mathbf{u^2}} \cdot (u')^2 + 2\mathbf{r}''_{\mathbf{uv}} \cdot u'v' + \mathbf{r}''_{\mathbf{v^2}} \cdot (v')^2 + \mathbf{r}'_{\mathbf{u}} \cdot u'' + \mathbf{r}'_{\mathbf{v}} \cdot v''.$$

Astfel, pentru curbura normală a curbei $\boldsymbol{\rho}_1(s)$ obţinem expresia:

$$\begin{aligned} k_n(s) &= \mathbf{k}(s) \cdot \mathbf{n}(\boldsymbol{\rho}_1(s)) = \boldsymbol{\rho_1}''(s) \cdot \mathbf{n}(\boldsymbol{\rho}_1(s)) = \\ &= \mathbf{r}''_{\mathbf{u^2}} \cdot \mathbf{n} \cdot (u')^2 + 2\mathbf{r}''_{\mathbf{uv}} \cdot \mathbf{n} \cdot u'v' + \mathbf{r}''_{\mathbf{v^2}} \cdot \mathbf{n} \cdot (v')^2 = \\ &= -L \cdot (u')^2 - 2M \cdot u'v' - N \cdot (v')^2 = \varphi_2(\boldsymbol{\rho_1}'(s), \boldsymbol{\rho_1}'(s)). \end{aligned}$$

Ne întoarcem acum la curba parametrizată iniţială. Avem

$$\boldsymbol{\rho}'(s) = \boldsymbol{\rho_1}'(s(t)) \cdot s'(t) \qquad \text{where} \quad s'(t) \equiv \|\boldsymbol{\rho}'(t)\|.$$

Astfel,

$$\boldsymbol{\rho_1}'(s(t)) = \frac{\boldsymbol{\rho}'(t)}{\|\boldsymbol{\rho}'(t)\|},$$

de aceea,

$$k_n(t) = \varphi_2\left(\frac{\boldsymbol{\rho}'(t)}{\|\boldsymbol{\rho}'(t)\|}, \frac{\boldsymbol{\rho}'(t)}{\|\boldsymbol{\rho}'(t)\|}\right) = \frac{1}{\boldsymbol{\rho}'(t) \cdot \boldsymbol{\rho}'(t)} \cdot \varphi_2(\boldsymbol{\rho}'(t), \boldsymbol{\rho}'(t)) = \frac{\varphi_2(\boldsymbol{\rho}'(t), \boldsymbol{\rho}'(t))}{\varphi_1(\boldsymbol{\rho}'(t), \boldsymbol{\rho}'(t))}.$$

□

Consecinţă. *Dacă două curbe de pe o suprafaţă orientată au un punct comun şi în punctul comun au aceeaşi tangentă, atunci cele două curbe au aceeaşi curbură normală în punctul de contact.*

Demonstraţie. Fie $\mathbf{p}$ şi $\mathbf{q}$ vectorii tangenţi la cele două curbe în punctul lor comun. Din ipoteză, $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{q}$, ceci, din teoremă,

$$k_n = \frac{\varphi_2(\mathbf{p}, \mathbf{p})}{\varphi_1(\mathbf{p}, \mathbf{p})} = \frac{\varphi_2(\alpha\mathbf{q}, \alpha\mathbf{q})}{\varphi_1(\alpha\mathbf{q}, \alpha\mathbf{q})} = \frac{\alpha^2\varphi_2(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{\alpha^2\varphi_1(\mathbf{q}, \mathbf{q})} = \frac{\varphi_2(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{\varphi_1(\mathbf{q}, \mathbf{q})}$$

□

Observaţie. Consecinţa precedentă poate fi interpretată în alt mod. Considerăm o familie de curbe parametrizate biregulare pe suprafaţă, $\{\boldsymbol{\rho}^\alpha(t)\}_{\alpha\in A}$, toate trecând prin acelaşi punct şi având aceeaşi tangentă în punctul de contact. Vom nota cu k^α curbura curbei $\boldsymbol{\rho}^\alpha$ şi cu θ^α unghiul dintre versorul normalei la suprafaţă şi planul osculator al curbei $\boldsymbol{\rho}^\alpha$. Consecinţa este echivalentă cu afirmaţia că produsul $k_n = k^\alpha \cos\theta^\alpha$ nu depinde de alegerea curbei din familie. Are sens, astfel, să alegem o dreaptă oarecare în planul tangent, care trece prin originea spaţiului tangent(deci prin punctul de tangenţă) şi să vorbim despre curbura normală a *suprafeţei* în direcţia acestei drepte sau, altfel spus, putem defini o aplicaţie k_n pe mulţimea tuturor vectorilor nenuli tangenţi la suprafaţă cu valori reale, punând

$$k_n(\mathbf{h}) = \frac{\varphi_2(\mathbf{h},\mathbf{h})}{\varphi_1(\mathbf{h},\mathbf{h})}. \tag{4.13.3}$$

Mărimea $k_n(\mathbf{h})$ se numeşte *curbura normală a suprafeţei în direcţia vectorului* **h** (deoarece, în mod clar, depinde doar de *direcţia* vectorului **h**, nu şi de lungimea sau sensul acestuia.) Astfel, *curbura normală* a unei suprafeţe orientate în direcţia unui vector nenul **h** este curbura normală a unei curbe parametrizate oarecare care trece prin originea lui **h** şi al cărei vector tangent este coliniar cu **h**.

4.14 Direcţii asimptotice şi linii asimptotice pe o suprafaţă

Am văzut mai devreme că curbura normală la o suprafaţă într-un punct dat şi într-o direcţie dată se poate exprima în funcţie de primele două forme fundamentale ale suprafeţei în acel punct (evaluate pe un vector tangent la suptafaţă în acel punct, având aceeaşi direcţie cu direcţia dată) şi că, deşi iniţial a fost definită cu ajutorul unor *curbe* pe suprafaţă, în realitate ea depnde doar de de direcţia vectorilor tangenţi la aceste curbe în punctul de contacte. Este interesant pentru noi să identificăm acele direcţii pentru care curbura normală se anulează.

Definiţia 4.14.1. Fie S o suprafaţă orientată şi $p \in S$. Vom spune că un vector nenul $\mathbf{h} \in T_pS$ are *direcţie asimptotică* dacă curbura normală în direcţia sa se anulează. În mod alternativ, bazându-ne pe secţiunea precedentă, putem spune că un vector are direcţie asimptotică dacă

$$\varphi_2(\mathbf{h},\mathbf{h}) = 0.$$

În mod corespunzător, vom spune că o curbă pe suprafaşă este o *linie asimptotică* sau o *curbă asimptotică* dacă toţi vectorii săi tangenţi au direcţie asimptotică.

Nu în fiecare punct al unei suprafeţe există direcţii asimptotice. Următorul rezultat ne oferă o condiţie necesară şi suficientă pentru existenţa uno astfel de direcţii.

Teorema 4.1. *Fie $p \in S$ un punct al unei suprefeţe orientate. Atunci în acest punct există direcţii asimptotice dacă şi numai dacă forma pătratică asociată celei de-a doua forme fundamenta;e a lui S în p este negativ semidefinită. Dacă alegem o parametrizare loicală $(U, \mathbf{r})$ a lui S în jurul lui p astfel încât $p = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ pentru o pereche $(u_0, v_0) \in U$, atunci această condiţie înseamnă, pur îi simplu, că*

$$D(u_0, v_0) \cdot D''(u_0, v_0) - D'^2(u_0, v_0) \leq 0. \tag{4.14.1}$$

Demonstraţie. Fie $\mathbf{h} = \{h_1, h_2\} \in T_pS$ un vector nenul, tangent la suprafaţă în punctul p. Atunci, în parametrizarea locală aleasă, $\mathbf{h}$ are direcţie asimptotică dacă Şi numai dacă

$$D(u_0, v_0)h_1^2 + 2D'(u_0, v_0)h_1h_2 + D''(u_0, v_0)h_2^2 = 0.$$

Cum $\mathbf{h} \neq 0$, putem presupune, de exemplu, că $h_2 \neq 0$. Atunci ecuaţia precedentă se poate scrie

$$D(u_0, v_0)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 + 2D'(u_0, v_0)\frac{h_1}{h_2} + D''(u_0, v_0) = 0.$$

În mod evident, această ecuaţie (cu necumoscuta h_1/h_2) are soluţii *reale* dacă şi numai dacă discriminantul său este pozitiv, dar aceasta este chiar condiţia 4.14.1. $\square$

Observaţie. Din demonstraţia teoremei precedente rezultă că atunci când cea de-a doua formă fundamentală este negativ definită avem două direcţii asimptotice, în timp ce în punctele în care este degenerată avem una singură (sau, mai precis, două confundate).

Din definiţia curburii normale a unei curbe de pe o suprafaţă rezultă imediat că

Propoziţia 4.14.1. *Orice dreaptă situată pe o suprafaţă este o linie asimptotică a suprafeţei.*

Demonstraţie. Într-adevăr, dreptele au curbura nulă, ceea ce înseamnă că şi curbura lor normală, relativ la orice suprafaţă pe care se află, se anulează. $\square$

Ecuaţia diferenţială a liniilor asimptotice pe o suprafaţă se poate obţine direct din definiţie.

Teorema 4.2. *Fie S o suprafaţă orientată şi $\boldsymbol{\rho} : I \to S$ – o curbă de pe suprafaţă. Presupunem că există o parametrizare locală a lui S, $(U, \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v))$, astfel încât $\boldsymbol{\rho}(I) \subset \mathbf{r}(U)$, iar ecuaţiile locale ale curbei în această parametrizare sunt $u = u(t), v = v(t)$. Atunci $\boldsymbol{\rho}$ este o linie asimptotică pe S dacă şi numai dacă*

$$D(u(t), v(t)) \cdot u'^2(t) + 2 \cdot D'(u(t), v(t)) \cdot u'(t) \cdot v'(t) + D''(u(t), v(t)) \cdot v'^2(t) = 0. \tag{4.14.2}$$

Demonstraţie. Ecuaţia (4.14.2) este condiţia ca vectorul tangent la curbă (care are, în raport cu baza naturală a spaţiului tangent, componentele $\{u'(t), v'(t)\}$) să aibă direcţie asimptotică. $\square$

Să presupunem, acum, că curba $\boldsymbol{\rho}$ din teorema precedentă este biregulară, ceea ce înseamnă, în particular, că curbura sa este totdeauna strict pozitivă. Din definiţia curburii normale rezultă imediat că, dacă $\boldsymbol{\nu}$ este versorul normalei principale al curbei, atunci curba este o linie asimptotică dacă şi numai dacă

$$\boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{n}(u(t), v(t)) = 0,$$

unde $\mathbf{n}$ este versorul normalei la suprafaţă. Aceasta înseamnă, de fapt, că normala principală a curbei este situată în planul tangent la suprafaţă, în fiecare punct al curbei. Astfel, obţinem următoarea caracterizare a liniilor asimptotice:

Teorema 4.3. *Fie S o suprafaţă orientată şi $\boldsymbol{\rho}$ o curbă parametrizată biregulară pe S. Atunci $\boldsymbol{\rho}$ este o linie asimptotică dacă şi numai dacă în fiecare punct al său planul osculator coincide cu planul tangent la suprafaţă în acel punct.*

Un alt rezultat imediat referitor la liniile asimptotice este următorul:

Propoziţia 4.14.2. *Fie S o suprafaţă orientată şi $(U, \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v))$ – o parametrizare locală a lui S. Atunci liniile de coordonate $u = const$ şi $v = const$ sunt linii asimptotice pe $\mathbf{r}(U)$ dacă şi numai dacă $D = D'' = 0$.*

Exemplu. Să considerăm elicoidul, dat de parametrizarea (globală!)

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v \\ z = b \cdot v \end{cases}$$

unde b este o constantă. Un calcul imediat ne conduce la $D = D'' = 0$, $D'(u,v) = -b/\sqrt{b^2+u^2}$. Aceasta înseamnă, în acest caz particular, avem două linii asimptotice şi acestea sunt tocmai liniile de coordonate, $u = const$ şi $v = const$. Remarcăm că elicoidul este o suprafaţă riglată şi că, în fiecare punct, una dintre liniile de coordonate este o dreaptă (sau un segment de dreaptă). Aceasta este, desigur, linia $v = const$ (vezi figura **??**).

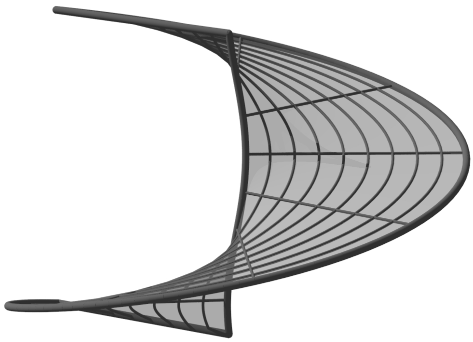


Figura 4.5 – Asymptotic lines on the helicoid

4.15 Clasificarea punctelor unei suprafeţe

Prima formă fundamentală a unei suprafeţe este pozitiv definită în toate punctele suprafeţei. A doua formă fundamentală, însă, poate fi pozitiv definită, negativ definită sau degenerată în diferite puncte ale suprafeţei. Putem face, prin urmare, o clasificare a punctelor suprafeţei în funcţie de semnul discriminantului $DD'' - D'^2$ al celei de-a doua forme fundamentale, care ne spune dacă forma este definită (pozitiv sau negativ) sau degenerată într-un anumit punct.

Definiţia 4.15.1. Un punct $a \in S$ al unei suprafeţe orientate se numeşte

(i) *eliptic*, dacă ce-a de-a doua formă fundamentală este pozitiv definită în a;

(ii) *parabolic*, dacă discriminantul celei de-a doua forme fundamentale este zero în a, dar cel puţin unul dintre coeficienţi este diferit de zero;

(iii) *hiperbolic*, dacă cea de-a doua formă fundamentală este negativ definită în a;

(iv) *plat* sau *planar*, dacă toţi coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale se anulează în a.

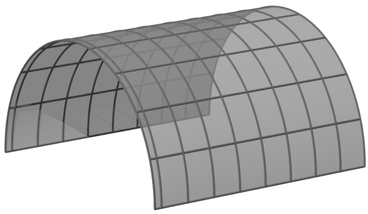


Figura 4.6 – Puncte parabolice pe o suprafaţă

Nu e dificil de constatat că această definiţie nu depinde de alegera parametrizării locale (compatibilă cu orientarea suprafeţei).

Vom discuta acum separat ce se întâmplă în fiecare caz şi vom da, de asemenea, nişte exemple.

Puncte eliptice. Într-un punct eliptic, curbura normală are acelaşi semn în toate direcţiile[4]. Dacă aplicăm teorema lui Meusnier, aceasta înseamnă că centrele de curbură ale tuturor secţiunilor normale se află de aceeaşi parte a suprafeţei. Un exemplu de suprafaţă care are numai puncte eliptice este elipsoidul dat, de exemplu, de parametrizarea

$$\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u \cos v, b \sin u \cos v, c \sin v). \tag{4.15.1}$$

Într-un punct eliptic al unei suprafeţe nu există direcţii asimptotice, de aceea printr-un punct eliptic nu trece nici o linie asimptotică.

Puncte parabolice. În acest caz, curbura normală nu-şi schimbă semnul, dar există exact o direcţie pentru care se anulează. Aceasta este, în mod clar, o direcţie asimptotică. Astfel, printr-un punct parabolic al unei suprafeţe trece o singură linie asimptotică. Cilindrii şi conurile (cu vârfurile îndepărtate) au numai punct parabolice.

Puncte hiperbolice. În cazul punctelor hiperbolice, k_n îşi poate schimba semnul şi există exact două direcţii pentru care se anulează. Astfel, printr-un punct hiperbolic al suprafeţei trec două linii asimptotice distincte. Punctele hiperbolice ale unei suprafeţe

[4]Nu este, în mod necesar, pozitivă.

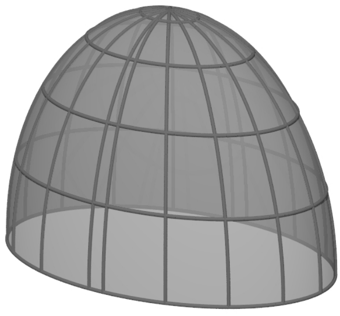


Figura 4.7 – Puncte eliptice pe o suprafaţă

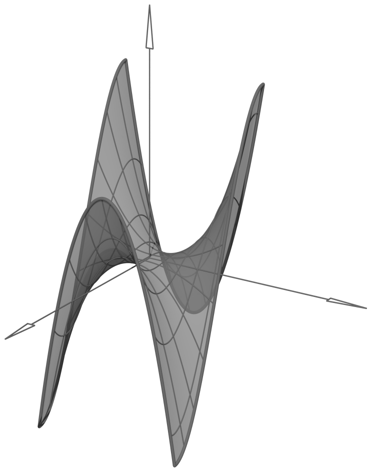


Figura 4.8 – Şaua maimuţei

se mai numesc şi *puncte şa*. Astfel de puncte se găsesc, de exemplu, pe un paraboloid hiperbolic.

Există, fireşte, suprafeţe pe care putem întâlni toate cele trei tipuri de puncte (de exemplu, torul de rotaţie).

Puncte planare. Forma unei suprafeţe în jurul unui punct planar poate fi destul de complicată şi dificil de studiat. De fapt, în multe cazuri, în demonstraţia unei

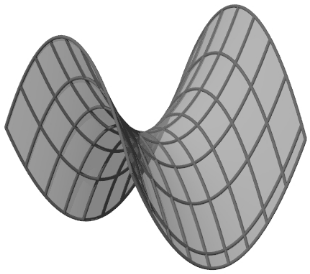


Figura 4.9 – Puncte hiperbolice pe o suprafaţă

teoreme din teoria suprafeţelor se presupune, în mod explicit, că suprafaţa nu are puncte planare. Suprafaţa din figura **??** (*şaua maimuţei*) are un punct planar în originea coordonatelor.

4.16 Direcţii principale, curburi principale, curbura Gauss şi curbura medie

Definiţia 4.16.1. Direcţiile din planul tangent la o suprafaţă orientată S într-un punct $a \in S$, $T_a S$, care corespund valorilor proprii ale operatorului de formă A se numesc *direcţii principale* ale suprafeţei în punctul a.

Observaţie. În fiecare punct, o suprafaţă orientată fie are două direcţii proprii ortogonale (dacă valorile proprii ale lui A sunt distincte), fie toate direcţiile sunt principale (dacă cele două valori proprii coincid).

Definiţia 4.16.2. O curbă (Γ) pe o suprafaţă orientată S se numeşte *linie principală* sau *linie de curbură* dacă tangenta sa, în fiecare punct, are direcţie principală.

Definiţia 4.16.3. Se numeşte *curbură principală* a unei suprafeţe orientate S în punctul $a \in S$, curbura normală a lui S în a într-o direcţie principală.

Propoziţia 4.16.1. *Curburile principale ale unei suprafeţe orientate sunt valorile proprii ale operatorului de formă, luate cu semn schimbat.*

Demonstraţie. Dacă $\mathbf{e}$ este o valoare proprie a lui A, atunci $A(\mathbf{e}) = \lambda \cdot \mathbf{e}$, unde λ este valoarea proprie coerspunzătoare lui $\mathbf{e}$, de aceea

$$k_n(\mathbf{e}) = \frac{\varphi_2(\mathbf{e}, \mathbf{e})}{\varphi_1(\mathbf{e}, \mathbf{e})} = \frac{-A(\mathbf{e}) \cdot \mathbf{e}}{\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}} = \frac{-\lambda \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}}{\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}} = -\lambda.$$

□

În continuare, vom nota cu k_1 şi k_2 curburile principale şi vom presupune, întotdeauna, că avem $k_1 \geq k_2$.

Definiţia 4.16.4. O bază ortonormată $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ a spaţiului tangent într-un punct al unei suprafeţe se numeşte *bază de direcţii principale* a spaţiului tangent dacă vectorii bazei au direcţii principale.

Astfel, vectorii unei baze de direcţii principale verifică

$$A(\mathbf{e}_i) = -k_i \mathbf{e}_i, \quad i = \overline{1, 2}.$$

Fixăm acum un punct pe suprafaţă şi ne punem următoarea problemă: să se determine curbura normală în direcţia unui vector $\mathbf{e}$, astfel încât $\angle(\mathbf{e}, \mathbf{e}_1) = \theta$.

Întrucât lungimea lui $\mathbf{e}$ nu este importantă, vom presupune că $\mathbf{e}$ este un versor: $\|\mathbf{e}\| = 1$. Atunci $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 \cdot \cos\theta + \mathbf{e}_2 \cdot \sin\theta$, de aceea

$$k_n(\mathbf{e}) = \frac{\varphi_2(\mathbf{e}, \mathbf{e})}{\varphi_1(\mathbf{e}, \mathbf{e})} = \frac{-A(\mathbf{e}) \cdot \mathbf{e}}{\underbrace{\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}}_{=1}} = -A(\mathbf{e}_1 \cos\theta + \mathbf{e}_2 \sin\theta) \cdot (\mathbf{e}_1 \cos\theta + \mathbf{e}_2 \sin\theta) =$$

$$= (k_1 \cos\theta \cdot \mathbf{e}_1 + k_2 \sin\theta \cdot \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_1 \cos\theta + \mathbf{e}_2 \sin\theta) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta.$$

Astfel, obţinem:

Teorema 4.16.1. *Fie S o suprafaţă orientată. Atunci curbura normală într-un punct al suprafeţei, în direcţia unui vector* $\mathbf{e}$*, este dată de* formula lui Euler*:*

$$k_n(\mathbf{e}) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta, \tag{4.16.1}$$

unde k_1 şi k_2 sunt curburile principale ale suprafeţei, în timp ce $\theta = \angle(\mathbf{e}, \mathbf{e}_1)$.

O consecinţă imediată a teoremei lui Euler este:

Teorema 4.16.2. *Curburile principale ale unei suprafeţe într-un punct sunt valorile extreme ale curburii normale a suprafeţei în direcţia unui vector* $\mathbf{e}$*, atunci când vectorul* $\mathbf{e}$ *se roteşte în jurul originii spaţiului tangent la suprafaţă în acel punct.*

Demonstraţie. Din formula lui Euler, obţinem

$$k_n(\mathbf{e}) = k_1 \cos^2\theta + k_2(1 - \cos^2\theta) = k_2 + (k_1 - k_2)\cos^2\theta.$$

Este clar că valoarea maximă a curburii normale se atinge atunci când $\theta = 0$ (am presupus că $k_1 \geq k_2$!) şi, în acest caz, obţinem $k_n = k_1$, în timp ce valoarea minimă – pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$, rezultând $k_n = k_2$. □

Definiţia 4.16.5. Mărimile $K_t = k_1 \cdot k_2$ şi $K_m = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ se numesc *curbura totală* (sau Gaussiană), respectiv *curbura medie* a suprafeţei.

Curbura totală şi cea medie ale unei suprafeţe pt fi calculate uşor dacă se cunoaşte matricea operatorului de formă într-o bază oarecare. Într-adevăr, avem:

Propoziţia 4.16.2.

$$K_m = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\mathcal{A} \tag{4.16.2}$$

$$K_t = \det\mathcal{A}. \tag{4.16.3}$$

Demonstraţie. Se ştie foarte bine din algebra liniară că determinantul şi urma sunt invarianţi ai oricărui operator liniar, ceea ce înseamnă că ei sunt aceeaşi în orice bază, chiar dacă matricea operatorului se modifică, în general, când trecem de la o bază la alta. Într-o bază de direcţii principale, matricea operatorului de formă este:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix}$$

de aceea

$$\det\mathcal{A} = k_1 \cdot k_2 = K_t$$
$$-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\mathcal{A} = -\frac{1}{2}(-k_1 - k_2) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = K_m.$$

□

Teorema lui Joachimstahl

Vom vedea mai jos cum putem găsi liniile de curbură ale unei suprafeţe prin integrarea unei ecuaţii diferenţiale. Totuşi, în anumite situaţii speciale este posibilă determinarea acestor lini şi prin alte metode. Un exemplu de astfel de situaţie este ilustrat de următoarea teoremă, aparţinând matematicianului german Joachimstahl.

Teoremă. *Fie γ o curbă situată la intersecţia a două suprafeţe regulare orientate S_1 şi S_2 din $\mathbb{R}^3$. Fie $\mathbf{n}_i$ versorii normalelor la cele două suprafeţe ($i = \overline{1,2}$). Să presupunem că S_1 şi S_2 se intersectează sub un unghi constant, adică de-a lungul curbei γ avem $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 =$ const.. Atunci γ este o linie de curbură pe S_1 dacă şi numai dacă este linie de curbură şi pe S_2.*

Demonstraţie. Fie $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ o parametrizare locală a curbei γ. Atunci, întrucât $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \text{const}$, avem

$$0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) = \mathbf{n}_1' \cdot \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2'.$$

Dacă γ este o linie principală pe S_1, atunci

$$\mathbf{n}_1' = -k_1 \cdot \mathbf{r}',$$

unde k_1 este una dintre curburile principale ale suprafeţei S_1. Pe de altă parte, întrucât curba γ se află, de asemenea, pe S_2, avem $\mathbf{r}' \perp \mathbf{n}_2$. De aici şi din formula precedentă obţinem că $\mathbf{n}_1' \cdot \mathbf{n}_2 = 0$, de aceea

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2' = 0.$$

Întrucât $\mathbf{n}_2' \perp \mathbf{n}_2$ (deoarece $\mathbf{n}_2$ are lungime constantă), rezultă de aici şi din ecuaţia precedentă că $\mathbf{n}_2' \perp \mathbf{r}'$ sau, cu alte cuvinte, că există un $k_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\mathbf{n}_2' = -k_2 \mathbf{r}',$$

adică γ este linie de curbură şi pe suprafaţa S_2. □

Consecinţă. *Meridianele şi paralele pe o suprafaţă de revoluţie sunt linii de curbură.*

Demonstraţie. Fie γ curba (plană) care se roteşte şi S suprafaţa de revoluţŞie rezultată. Un meridian se obţine intersectând un plane Π_m, care trece prin axa de rotaţie, cu suprafaţa S. Dacă $p \in \Pi_m \cap S$, atunci versorul normalei la suprafaţa S, $\mathbf{n}(p)$, este situat în planul Π_m, de aceea normala la suprafaţă şi normala la planul Π_m fac un unghi constant, egal cu $\frac{\pi}{2}$. Cum pentru plan a doua formă fundamentală este identic nulă, acelaşi lucru este adevărat şi pentru operatorul de formă, ceea ce înseamnă că toate curbele plane sunt linii de curbură. Rezultă că, în particular, meridianul este, de asemenea, o linie de curbură a planului Π_m, ceea ce implică, via teorema lui Joachimstahl, că este o linie de curbură şi pentru suprafaţa S.

Un paralel este curba de intersecţie dintre suprafaţa de revoluţie S şi un plan Π_p, care trece printr-un punct al curbei γ şi este perpendicular pe axa de rotaţie. Este evident, din motive de simetrie, că de-a lungul unui paralel trebuie să avem $\angle(\mathbf{n}, \Pi_p) = \text{const}$ şi aplicăm, din nou, raţionamentul de mai sus. □

4.16.1 Determinarea liniilor de curbură

După cum am văzut mai devreme, liniile de curbură ale unei suprafeţe sunt curbe pe suprafaţă pentru care toţi vectorii tangenţi sunt vectori proprii ai operatorului de formă. De aceea, înainte de a arăta cum se pot determina liniile de curbuă, vom indica o modalitate de găsire a vcalorilor proprii ale operatorului de formă.

Lemă. *Fie* $\mathbf{r} : U \to \mathbb{R}^3$ *o parametrizare locală a unei suprafeţe orientate* S. *Un vector tangent* $\mathbf{v} = v_1\mathbf{r}'_{\mathbf{u}} + v_2\mathbf{r}'_{\mathbf{v}}$ *are direcţie principală dacă şi numai dacă*

$$\begin{vmatrix} v_2^2 & -v_1v_2 & v_1^2 \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix} = 0. \tag{4.16.4}$$

Demonstraţie. Întrucât $\mathbf{v}$ are direcţie principală dacă şi numai dacă este un vector propriu al operatorului de formă A, adică $A(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$, rezultă că $\mathbf{v}$ are direcţie principală dacă şi numai dacă $A(\mathbf{v}) \times \mathbf{v} = 0$. Dar, din definiţie,

$$A(\mathbf{v}) = \mathcal{A} \cdot \mathbf{v} = \left(\mathcal{G}^{-1} \cdot \mathcal{H}\right) \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{H^2}\begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ -FL + EM & -FM + EN \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{H^2}\begin{pmatrix} (GL - FM)v_1 + (GM - FN)v_2 \\ (-FL + EM)v_1 + (-FM + EN)v_2 \end{pmatrix}$$

sau

$$A(\mathbf{v}) = \frac{1}{H^2}\overbrace{[(GL - FM)v_1 + (GM - FN)v_2]}^{\alpha_u}\mathbf{r}_\mathbf{u}^{'} +$$
$$+\frac{1}{H^2}\underbrace{[(-FL + EM)v_1 + (-FM + EN)v_2]}_{\alpha_v}\mathbf{r}_\mathbf{v}^{'}.$$

De aceea,

$$A(\mathbf{v}) \times \mathbf{v} = 0 \iff (\alpha_u \mathbf{r}_\mathbf{u}^{'} + \alpha_v \mathbf{r}_\mathbf{v}^{'}) \times (v_1 \mathbf{r}_\mathbf{u}^{'} + v_2 \mathbf{r}_\mathbf{v}^{'}) = 0 \iff$$
$$\iff (\alpha_u \cdot v_2 - \alpha_v \cdot v_1) \cdot (\mathbf{r}_\mathbf{u}^{'} \times \mathbf{r}_\mathbf{v}^{'}) = 0.$$

Cum $\mathbf{r}_\mathbf{u}^{'} \times \mathbf{r}_\mathbf{v}^{'} \neq 0$, deoarece suprafaţa este regulară, rezultă că

$$A(\mathbf{v}) \times \mathbf{v} = 0 \iff \alpha_u \cdot v_2 - \alpha_v \cdot v_1 = 0$$

sau, ţinând cont de notaţiile pe care le-am introdus,

$$(FL - EM)v_1^2 + (GL - EN)v_1 v_2 + (GM - FN)v_2^2 = 0.$$

Folosind acum coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale în locul elementelor matricii $\mathcal{H}$, relaţia precdedentă devine

$$(ED' - FD)v_1^2 + (ED'' - GD)v_1 v_2 + (FD'' - GD')v_2^2 = 0. \qquad (4.16.5)$$

ceea ce este o altă formă a relaţiei (4.16.4) □

Consecinţă (ecuaţia diferenţială a liniilor de curbură). *Fie γ o curbă situată în domeniul $\mathbf{r}(U)$ al unei parametrizări locale $(\mathbf{r}, U)$ a suprafeţei S, cu ecuaţiile locale $\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$. Atunci γ este o linie de curbură pe S dacă şi numai dacă*

$$(ED' - FD)u'^2(t) + (ED'' - GD)u'(t)v'(t) + (FD'' - GD')v'^2(t) = 0 \quad (4.16.6)$$

sau

$$(ED' - FD) + (ED'' - GD)\frac{dv}{du} + (FD'' - GD')\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0. \qquad (4.16.7)$$

Demonstraţie. Relaţia (4.16.6) exprimă, în mod clar, condiţia ca vectorul $\boldsymbol{\rho}' = u'(t)\mathbf{r}_\mathbf{u}^{'} + v'(t)\mathbf{r}_\mathbf{v}^{'}$ să aibă direcţie principală, în timp ce (4.16.7) rezultă imediat din (4.16.6), eliminând parametrul t. □

4.16.2 Calculul curburilor unei suprafeţe

Teoremă. *Fie* $\mathbf{r} : U \to \mathbb{R}^3$ *o parametrizare locală a unei suprafeţe orientate* S*. Atunci curbura totală şi curbura medie ale lui* S *sunt date de formulele:*

$$K_t = \frac{DD'' - D'^2}{H^2} \tag{4.16.1}$$

$$K_m = \frac{DG - 2D'F + D''E}{2H^2}. \tag{4.16.2}$$

Demonstraţie. După cum am văzut mai devreme, matricea operatorului de formă al suprafeţei este dată de

$$\mathcal{A} = \frac{1}{H^2}\begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ -FL + EM & -FM + EN \end{pmatrix}$$

sau

$$\mathcal{A} = \frac{1}{H^2}\begin{pmatrix} FD' - GD & FD'' - GD' \\ FD - ED' & FD' - ED'' \end{pmatrix},$$

de aceea

$$K_t = \det\mathcal{A} = \frac{1}{H^4}\Big[F^2D'^2 - EFD'D'' - FGDD' + EGDD'' - F^2DD'' +$$
$$+ EFD'D'' + +FGDD' - EGD'^2\Big] = \frac{1}{H^4}\left[\underbrace{(EG - F^2)}_{H^2}\cdot(DD'' - D'^2)\right] =$$
$$= \frac{DD'' - D'^2}{H^2},$$
$$K_m = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\mathcal{A} = -\frac{1}{2H^2}\left(2FD' - GD - ED''\right) = \frac{DG - 2D'F + D''E}{2H^2}.$$

□

Corolar. *Curburile principale* k_1 *şi* k_2 *sunt rădăcinile ecuaţiei*

$$k^2 - 2K_m \cdot k + K_t = 0, \tag{4.16.3}$$

adică

$$k_1 = K_m + \sqrt{K_m^2 - K_t}, \tag{4.16.4}$$

$$k_2 = K_m - \sqrt{K_m^2 - K_t}. \tag{4.16.5}$$

Corolar. *Un punct nonplanar al unei suprafeţe este*

1. *eliptic dacă şi numai dacă* $K_t > 0$*;*
2. *parabolic dacă şi numai dacă* $K_t = 0$*;*
3. *hiperbolic dacă şi numai dacă* $K_t < 0$*.*

4.17 Ecuaţiile fundamentale ale unei suprafeţe

4.17.1 Introduction

Am văzut că în cazul curbelor curbura şi torsiunea determnină în mod complet o curbă în spaţiu, până la o deplasare a spaţiului. Ne putem întreba dacă există un rezultat similar în cazul suprafeţelor. Nu este pe complet evident cu ce trebuie să înlocuim curbura şi torsiunea, dar primelr două forme fundamentale sut, în mod clar, candidate bune. Astfel, întrebarea se poate formula în modul următor: Dacă ni se dau un domeniu $U \subset \mathbb{R}^2$ îi două familii de forme biliniare, câte o pereche pentru fiecare punct din U, cu coeficienţii depinzând neted de coordonatele pe U, astfel încât, în fiecare punct din U, prima formă să fie pozitiv definită, există o suprafaţă parametrizată regulară $\mathbf{r} : U \to \mathbb{R}^3$ astfel încât cele două familii de forme biliniare să constituie primele două forme fundamentale ale acestei suprafeţe parametrizate? Răspunsul nu este afirmativ, deoarece, aşa cum vom vedea, coeficienţii primelor două forme fundamentale ale unei suprafeţe nu sunt independenţi, de aceea, datele noastre iniţiale trebuie să satisfacă anumite condiţii (care sunt, în fapt, condiţiile de compatibilitate penbtru un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale). Totuşi, dacă aceste condiţţ sunt îndeplinite, atunci răspunsul negativ se transformă într-unul afirmativ. Scopul acestei secţiuni este acela de a stabili coniţiile de compatibilitate şi de a formula teorema de existenţă şi unicitate pentru suprafeţe parametrizate.

4.17.2 Regulile de diferenţiere. Coeficienţii lui Christoffel

Dacă $(U, \mathbf{r})$ este o suprafaţă parametrizată regulară, atunci, pentru orice $(u, v) \in U$, vectorii $\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v, \mathbf{n}$ formează o bază a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^3_{\mathbf{r}(u,v)}$. De aceea, în particular, derivatele acestor vectori pot fi exprimate în funcţie de vectorii înşişi. Am văzut, deja, cum se exprimă derivatele versorului normalei. Ele definesc, în esenţă, operatorul de formă al suprafeţei. Vom obţine acum formule analoage pentru derivatele de ordinul al doilea ale razei vectoare. Aceste formule trebue saă fie de forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}''_{u^2} &= \Gamma^1_{11}\mathbf{r}'_u + \Gamma^2_{11}\mathbf{r}'_v + A\,\mathbf{n}\\
\mathbf{r}''_{uv} &= \Gamma^1_{12}\mathbf{r}'_u + \Gamma^2_{12}\mathbf{r}'_v + B\,\mathbf{n}\\
\mathbf{r}''_{v^2} &= \Gamma^1_{22}\mathbf{r}'_u + \Gamma^2_{22}\mathbf{r}'_v + C\,\mathbf{n}
\end{aligned} \tag{4.17.1}$$

Copeficienţii Γ din aceste ecuaţii se numesc *coeficienţii lui Christoffel (de speţa a doua)*. Coeficienţii A, B, C snt, după cum ne putem convinge uşor, coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale. Pentru a-i găsi pe ceilalţi, vom determina, înainte de toate, produsele scalare $\mathbf{r}''_{u^2}\cdot\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}''_{u_2}\cdot\mathbf{r}'_v$ şi analoagele lor în funcţie de coeficienţii primei forme fundamentale şi de derivatele lor. Avem, înainte de toate, ${\mathbf{r}'_u}^2 = E$, de unde, derivând în raport cu u, obţinem

$$\mathbf{r}''_{u^2}\cdot\mathbf{r}'_u = \frac{1}{2}E'_u. \tag{4.17.2}$$

Derivând aceeaşi egalitate în raport cu v, obţinem

$$\mathbf{r}''_{uv}\cdot\mathbf{r}'_u = \frac{1}{2}E'_v \tag{4.17.3}$$

Exact la fel, plecând de la definiţiile celorlalţi doi coeficienţi ai primei forme fundamentale, vom obţine

$$\mathbf{r}''_{uv}\cdot\mathbf{r}'_v = \frac{1}{2}G'_u \tag{4.17.4}$$

$$\mathbf{r}''_{u^2}\cdot\mathbf{r}'_v = F'_u - \frac{1}{2}E'_v \tag{4.17.5}$$

$$\mathbf{r}''_{v^2}\cdot\mathbf{r}'_u = F'_v - \frac{1}{2}G'_u \tag{4.17.6}$$

$$\mathbf{r}''_{v^2}\cdot\mathbf{r}'_v = \frac{1}{2}G'_v \tag{4.17.7}$$

Revenind la problema noastră, înmulţim scalar prima ecuaţie din (4.17.1), succesiv, cu $\mathbf{r}'_u$ şi cu $\mathbf{r}'_v$. Folosind formulele (4.17.2) şi (4.17.5), precum şi definiţiile coeficienţilor primei forme fundamentale, obţinem sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} E\Gamma^1_{11} + F\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}E'_u\\ F\Gamma^1_{11} + G\Gamma^2_{11} = F'_u - \frac{1}{2}E'_u \end{cases}.$$

Sistemul este foarte uşor de rezolvat şi obţinem

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \dfrac{GE'_u - 2FF'_u + FE'_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{11}^2 = \dfrac{2EF'_u - EE'_v - FE'_u}{2(EG - F^2)} \end{cases} \tag{4.17.8}$$

şi, exact la fel, plecând de la celelalte două ecuaţii din (4.17.1), obţinem

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 = \dfrac{GE'_v - FG'_u}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{12}^2 = \dfrac{EG'_u - FE'_v}{2(EG - F^2)} \end{cases} \tag{4.17.9}$$

şi

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 = \dfrac{2GF'_v - GG'_u - FG'_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{22}^2 = \dfrac{EG'_v - 2FF'_v - FG'_u}{2(EG - F^2)} \end{cases} . \tag{4.17.10}$$

Cât despre derivatele versoruluyi normalei, le obţinem imediat din expresia operatorului de formă în funcţie de coeficienţii primelor două forme fundamentale:

$$\begin{cases} \mathbf{n}'_u = \dfrac{FD' - GD}{EG - F^2}\mathbf{r}'_u + \dfrac{FD - ED'}{EG - F^2}\mathbf{r}'_v \\ \mathbf{n}'_v = \dfrac{FD'' - GD'}{EG - F^2}\mathbf{r}'_u + \dfrac{FD' - ED''}{EG - F^2}\mathbf{r}'_v \end{cases} \tag{4.17.11}$$

Observaţie. Formulele (4.17.11) au fost obţinute pentru prima dată de către matematicianul german Julius Weingarten, de aceea ele se numesc *formulele lui Weingarten*. Este clar că aceste formule determină în mod unic operatorul de formă. Acesta este motivul pentru care acest ooperator (sau opusul său) este numit, în multe cărţi *operatorul lui Weingarten* sau *aplicaţia lui Weingarten*.

Coeficienţii lui Christoffel şi Weingarten în coordonate de curbură

Să presupunem că în parametrizarea noastră liniile de coordonate sunt linii de curbură. Atunci, după cum am văzut mai devreme, trebuie să avem $F = 0$ şi $D' = 0$ pe întreg domeniul parametrizării. Prin urmare, după cum ne putem convinge cu uşurinţă, coeficienţii lui Christoffel devin:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{E'_u}{E} = \dfrac{\partial}{\partial u}\ln E, \quad \Gamma_{11}^2 = -\dfrac{E'_v}{2G}, \\ \Gamma_{12}^1 = \dfrac{\partial}{\partial v}\ln E, \quad \Gamma_{12}^2 = \dfrac{\partial}{\partial u}\ln G, \\ \Gamma_{22}^1 = -\dfrac{G'_u}{E}, \quad \Gamma_{22}^2 = \dfrac{\partial}{\partial v}\ln G, \end{cases} \tag{4.17.12}$$

în timp ce ecuaţiile lui Weingarten se transformă în:

$$\begin{cases} \mathbf{n}'_u = -\dfrac{D}{E}\mathbf{r}'_u \\ \mathbf{n}'_v = -\dfrac{D''}{G}\mathbf{r}'_v \end{cases} \tag{4.17.13}$$

Nu trebuie să ne surprindă faptul că derivatele parţiale ale cversorului normalei sunt coliniare cu derivatele paerţiale al rezei vectoare, întrucât asta rezultă chiar din definiţia liniilor de curbură.

4.17.3 Ecuaţiile lui Gauss şi ale lui Codazzi şi Mainardi pentru o suprafaţă parametrizată

Vom demonstra acum că între coeficienţii primelor două forme fundamentale ale unei suprafeţe parametrizate există anumite relaţii, pe care le vom numi *ecuaţiile lui Gauss*, respectiv *ecuaţiile Codazzi-Mainardi*. Le vom rezuma în următoarea teoremă:

Teorema 4.17.1 (Gauss, Codazzi, Mainardi)**.** *În orice parametrizare locală a unei suprafeţe sunt verificate următoarele sisteme de ecuaţii:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} - \dfrac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} + \Gamma_{11}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{21}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 = EK_t \\ \dfrac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u} - \dfrac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 = FK_t \\ \dfrac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u} - \dfrac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial v} + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1 = GK_t \\ \dfrac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial v} - \dfrac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial u} + \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2 = FK_t, \end{cases} \tag{4.17.14}$$

numite ecuaţiile lui Gauss*, şi relaţiile*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial v} - \dfrac{\partial D'}{\partial u} = D\Gamma_{12}^1 + D'(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - D''\Gamma_{11}^2 \\ \dfrac{\partial D'}{\partial v} - \dfrac{\partial D''}{\partial u} = D\Gamma_{22}^1 + D'(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - D''\Gamma_{12}^2, \end{cases} \tag{4.17.15}$$

numite ecuaţiile Codazzi-Mainardi. *Aici E, F, G sunt coeficienţii primei forme fundamentale a suprafeţei, în timp ce D, D', D'' sunt coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale.*

Demonstraţie. Pentru a simplifica puţin notaţiile, vom rescrie ecuaţiile lui Weingarten sub forma

$$\begin{cases} \mathbf{n}'_u = a_{11}\mathbf{r}'_u + a_{12}\mathbf{r}'_v \\ \mathbf{n}'_v = a_{21}\mathbf{r}'_u + a_{22}\mathbf{r}'_v \end{cases} . \tag{4.17.16}$$

Avem, în mod evident, relaţia

$$\mathbf{r}'''_{u^2v} - \mathbf{r}'''_{uvu} = 0.$$

Dar

$$\mathbf{r}''_{u^2} = \Gamma_{11}^1\mathbf{r}'_u + \Gamma_{11}^2\mathbf{b}'_v + D\,\mathbf{n},$$

deci

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'''_{u^2v} &= \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v}\mathbf{r}'_u + \Gamma_{11}^1\mathbf{r}''_{uv} + \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v}\mathbf{r}'_v + \Gamma_{11}^2\mathbf{r}''_{v^2} + \frac{\partial D}{\partial v}\,\mathbf{n} + D\,\mathbf{n}'_v = \\ &= \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v}\mathbf{r}'_u + \Gamma_{11}^1(\Gamma_{12}^1\mathbf{r}'_u + \Gamma_{12}^2\mathbf{r}'_v + D'\,\mathbf{n}) + \\ &+ \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v}\mathbf{r}'_v + \Gamma_{11}^2(\Gamma_{22}^1\mathbf{r}'_u + \Gamma_{22}^2\mathbf{r}'_v + D''\,\mathbf{n}) + \frac{\partial D}{\partial v}\,\mathbf{n} + D(a_{12}\mathbf{r}'_u + a_{22}\mathbf{r}'_v) = \\ &= \mathbf{r}'_u\left(\frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 + a_{12}D\right) + \\ &+ \mathbf{r}'_v\left(\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + a_{22}D\right) + \\ &+ \mathbf{n}\left(\frac{\partial D}{\partial v} + \Gamma_{11}^1 D' + \Gamma_{11}^2 D''\right). \end{aligned}$$

În mod analog,

$$\mathbf{r}''_{uv} = \Gamma^1_{12}\mathbf{r}'_u + \Gamma^2_{12}\mathbf{r}'_v + D'\,\mathbf{n},$$

deci

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'''_{uvu} &= \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial u}\mathbf{r}'_u + \Gamma^1_{12}\mathbf{r}''_{u^2} + \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial u}\mathbf{r}'_v + \Gamma^2_{12}\mathbf{r}''_{uv} + \frac{\partial D'}{\partial u}\mathbf{n} + D'\,\mathbf{n}'_u = \\
&= \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial u}\mathbf{r}'_u + \Gamma^1_{12}(\Gamma^1_{11}\mathbf{r}'_u + \Gamma^2_{11}\mathbf{r}'_v + D\,\mathbf{n}) + \\
&+ \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial u}\mathbf{r}'_v + \Gamma^2_{12}(\Gamma^1_{12}\mathbf{r}'_u + \Gamma^2_{12}\mathbf{r}'_v + D'\,\mathbf{n}) + \frac{\partial D'}{\partial u}\mathbf{n} + D'(a_{11}\mathbf{r}'_u + a_{21}\mathbf{r}'_v) = \\
&= \mathbf{r}'_u\left(\frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial u} + \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} + a_{11}D'\right) + \\
&+ \mathbf{r}'_v\left(\frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial u} + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} + a_{21}D'\right) + \\
&+ \mathbf{n}\left(\frac{\partial D'}{\partial u} + \Gamma^1_{12}D + \Gamma^2_{12}D'\right).
\end{aligned}$$

Dacă scădem relaţiile precedente, obţinem

$$\begin{aligned}
0 = \mathbf{r}'''_{u^2v} - \mathbf{r}'''_{uvu} &= \mathbf{r}'_u\left(\frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial u} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} + a_{12}D - a_{11}D'\right) + \\
&+ \mathbf{r}'_v\left(\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial u} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} + a_{22}D - a_{21}D'\right) + \\
&+ \mathbf{n}\left(\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} + \Gamma^1_{12}D - D'(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) + \Gamma^2_{12}D''\right).
\end{aligned}$$

Întrucât vectorii $\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v$ şi $\mathbf{n}$ sunt liniar independenţi, o combinaţie liniară a lor poate fi egală cu zero dacă şi numai dacă toţi coeficienţii sunt egali cu zero. Dacă egalăm cu zero coeficientul lui $\mathbf{n}$, se observă că obţinem prima ecuaţie Codazzi-Mainardi. Dacă egalăm cu zero coeficientul lui $\mathbf{r}'_u$ rezultă, folosind expresiile lui a_{21} şi a_{22}, prima ecuaţie a lui Gauss, în timp ce din coeficientul lui $\mathbf{r}'_v$ obţinem cea de-a doua ecuaţie a lui Gauss. Celelalte trei ecuaţii pot fi obţinute în acelaşi mod, folosind, de data aceasta, relaţia

$$\mathbf{r}'''_{uv^2} = \mathbf{r}'''_{vuv}.$$

□

Corolarul 4.17.1. *Dacă liniile de coordonate sunt linii de curbură, atunci ecuaţiile Codazzi-Mainardi capătă o formă mult mai simplă:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial v} = D\dfrac{\partial \ln E}{\partial v} + \dfrac{D''}{2G}\dfrac{\partial E}{\partial v} \\ \dfrac{\partial D''}{\partial u} = \dfrac{D}{2E}\dfrac{\partial G}{\partial u} + D''\dfrac{\partial \ln G}{\partial u}. \end{cases} \tag{4.17.17}$$

4.17.4 Teorema fundamentală a teoriei suprafeţelor

Teorema pe care o vom demonstra în această secţiune este analoaga teoremei de existenţă şi unicitate pentru curbe în spaţiu. A fost stabilită de către matrmaticianul francez Ossian Bonnet, în anul 1860.

Pentru a scurta formulele, în cele ce urmează vom nota coordonatele cu u^1 şi u^2 în loc de u şi v şi vom utiliza notaţiile cu indicei pentru a nota componentele primelor două fundamentale ale suprafeţei. Mai p[recis, pentru componentele primei forme fundamentale vom scrie

$$g_{11} = E, g_{12} = g_{21} = F, g_{22} = G, \tag{4.17.18}$$

în timp ce pentru componentele celei de-a doua forme fundamentale vom scrie

$$h_{11} = D, h_{12} = h_{21} = D', h_{22} = D''. \tag{4.17.19}$$

De asemenea, vom nota cu g determinantul matricii primei forme fundamentale. În fine, vom nota cu $\mathbf{r}'_\mathbf{i}$ derivata parţială a lui r în raport cu coordonata u^i şi cu $\mathbf{r}''_\mathbf{ij}$ – derivata parţială de ordinul al doilea a lui r în raport cu coordonatele u^i şi u^j, unde i şi j pot lua valorile 1 şi 2. În mod clar,întrucât presupunem întotdeauna că suprafeţele sunt atât de netede cât ne aşteptăm să fie (adică, în acest context, cel puţin de clasă C^2), ordinul de difernţiabilitate nu este relevant, aşa că vom avea, întotdeauna, $\mathbf{r}''_\mathbf{ij} = \mathbf{r}''_\mathbf{ji}$.

Theorem (Ossian Bonnet, 1860)**.** *Fie $U \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă. Pe U sunt date funcţiile matriciale simetrice*

$$g_{ij} = g_{ij}(u^1, u^2),\ h_{ij} = h_{ij}(u^1, u^2),\ i, j = 1, 2 \tag{4.17.20}$$

de clase C^2, respectiv C^1, astfel încât pentru orice $(u^1, u^2) \in U$ forma pătratică asociată formei biliniare a cărei matrice este (g_{ij}) este pozitiv definită şi, în plus, *componentele celor două funcţii verifică condiţiile de compatibilitate ale lui Gauss şi Codazzi-Mainardi. Alegem* $u_0 = (u_0^1, u_0^2) \in U$, $p_0 \in \mathbb{R}$ *şi vectorii*

$$\mathbf{r}_1'^{(0)}, \mathbf{r}_2'^{(0)}, \mathbf{n}^{(0)} \in T_{p_0}\mathbb{R}^3, \tag{4.17.21}$$

astfel încât $\mathbf{r}_i'^{(0)} \cdot \mathbf{r}_j'^{(0)} = g_{ij}(u_0)$, $\mathbf{n}^{(0)} \cdot \mathbf{r}_i'^{(0)} = 0$, $\mathbf{n}^{(0)} \cdot \mathbf{n}^{(0)} = 1$*, în timp ce tripletul* $\{\mathbf{r}_1'^{(0)}, \mathbf{r}_2'^{(0)}, \mathbf{n}^{(0)}\}$ *este o bază directă a spaţiului vectorial* $T_{p_0}\mathbb{R}^3$*. Atunci există o singură suprafaţă parametrizată regulară de clasă* C^3, $r : V \to \mathbb{R}^3$*, cu* $V \subset U$ *– o mulţime deschisă, astfel încât să fie verificate următoarele condiţii:*

(i) $r(u_0) = p_0$ *(suprafaţa "trece" prin* p_0 *pentru* $u = u_0$*).*

(ii) $\dfrac{\partial r}{\partial u^i}(u_0) = \mathbf{r}_i'^{(0)}$, $i = 1, 2$.

(iii) $\mathbf{n}(u_0) = \mathbf{n}^{(0)}$.

(iv) g_{ij} *şi* h_{ij} *sunt coeficienţii primelor două forme fundamentale ale unei suprafeţe parametrizate r (faţă de orientarea lui r definită de versorul normal* **n***).*

Demonstraţie. Considerăm sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{r}_i'}{\partial u^j} = \sum\limits_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k' + h_{ij}\mathbf{n}, \\ \dfrac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^i} = -\sum\limits_{j=1}^{2}\sum\limits_{k=1}^{2} h_{ij} g^{jk} \mathbf{r}_k' \end{cases} \tag{4.17.22}$$

în raport cu funcţiile necunoscute $\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2'$, $\mathbf{n}$, unde coeficienţii Γ_{ij}^k sunt calculaţi cu formulele (4.17.8)–(4.17.10). Acesta este un sistem liniar şi omogen care este complet integrabil, deoarece condiţiile de compatibilitate

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathbf{r}_i'}{\partial u^j \partial u^k} = \dfrac{\partial^2 \mathbf{r}_i'}{\partial u^k \partial u^j} \\ \dfrac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial u^j \partial u^k} = \dfrac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial u^k \partial u^j} \end{cases} \tag{4.17.23}$$

sunt echivalente, după cum am văzut, cu ecuaţiile Gauss-Weingarten care sunt verificate, prin ipoteză. De aceea, pe baza unor rezultate standard de teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale, rezultă că există o vecinătate deschisă $W \subset U$ a punctului u_0 şi un set de trei funcţii vectoriale de clasă C^2[5] $\mathbf{r'_1}, \mathbf{r'_2}, \mathbf{n} : W \to \mathbb{R}^3$, care sunt soluţii ale sistemului (4.17.22), cu condiţia iniţială dată în punctul u_0.

Să remarcăm, de asemenea, că un set de condiţii iniţiale ca în teoremă există întotdeauna datorită, în esenţă, faptului că forma pătratică asociată lui g_{ij} este pozitiv definită. Într-adevăr, putem face, de exemplu, următoarea alegere:

$$\begin{cases} \mathbf{r'_1}^{(0)} = \left\{\sqrt{g_{11}(u_0)}, 0, 0\right\} \\ \mathbf{r'_2}^{(0)} = \left\{\dfrac{g_{12}(u_0)}{\sqrt{g_{11}(u_0)}}, \dfrac{\sqrt{g_{11}(u_0)g_{22}(u_0) - (g_{12}(u_0))^2}}{\sqrt{g_{11}(u_0)}}, 0\right\} \\ \mathbf{n}^{(0)} = \{0, 0, 1\} \end{cases} . \tag{4.17.24}$$

Lăsăm pe seama cititorului să verifice că, într-adevăr, aceşti vectori îndeplinesc condiţiile din ipoteză.

Considerăm, acum, sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial u^1} = \mathbf{r'_1}, \\ \dfrac{\partial r}{\partial u^2} = \mathbf{r'_2} \end{cases} . \tag{4.17.25}$$

Acest sistem este, din nou, complet integrabil, deoarece condiţia de integrabilitate

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^j \partial u^i} \tag{4.17.26}$$

este echivalentă cu condiţia

$$\frac{\partial \mathbf{r'_i}}{\partial u^j} = \frac{\partial \mathbf{r'_j}}{\partial u^i} \tag{4.17.27}$$

care este adevărată, după cum ne putem convinge singuri examinând prima ecuaţie din (4.17.22), datorită simetriei celei de-a doua matrici, ($h_{ji} = h_{ij}$), şi datorită simetriei coeficienţilor lui Christoffel în indicii inferiori. De aceea, aplicând, din nou, teorema de existenţă şi unicitate, rezultă că există o vecinătate deschisă $V \subset W \subset U$ a lui u_0 şi o singură funcţie de clasă C^3, $r : V \to \mathbb{R}^3$ astfel încât $r(u_0) = p_0$.

[5] Ordinul de netezime este cu o unitate mai mare decât cel mai mic ordin de netezime al coeficienţilor, întrucât sistemul este de ordinul întâi.

Nu am terminat încă, deoarece mai trebuie să demonstrăm că g_{ij} şi h_{ij} sunt primele forme două forme fundamentale ale suprafeţei parametrizate definite de r. În aparenţă, trebuie să demonstrăm, de asemenea, că r este regulară. Dar aceasta rezultă imediat dacă demonstrăm că g este prima formă fundamentală, deoarece

$$g_{ij} = \frac{\partial r}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial r}{\partial u^j}$$

şi, prin urmare,

$$\frac{\partial r}{\partial u^i} \times \frac{\partial r}{\partial u^j} \neq 0,$$

întrucât pătratul normei acestui vector este diferit de zero (deoarece este egal cu determinantul primei forme fundamentale, care este strict mai mare decât zero, din moment ce forma este pozitiv definită). Este, de fapt, suficient să arătăm că următoarele relaţii sunt verificate pe întregul V:

$$\begin{cases} \mathbf{r'_i} \cdot \mathbf{r'_j} = g_{ij}, \\ \mathbf{r'_i} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1 \end{cases} . \tag{4.17.28}$$

În acest scop, vom calcula derivatele în raport cu coordonatele ale produsului scalar, folosind ecuaţiile Gauss-Weingarten şi obţinem sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\mathbf{r'_i} \cdot \mathbf{r'_j})}{\partial u^k} = \sum\limits_{l=1}^{2} \Gamma_{ik}^{l}(\mathbf{r'_l} \cdot \mathbf{r'_j}) + \sum\limits_{l=1}^{2} \Gamma_{jk}^{l}(\mathbf{r'_l} \cdot \mathbf{r'_i}) + h_{ik}(\mathbf{r'_j} \cdot \mathbf{n}) + h_{jk}(\mathbf{r'_i} \cdot \mathbf{n}) \\ \dfrac{\partial(\mathbf{r'_j} \cdot \mathbf{n})}{\partial u^i} = -\sum\limits_{l,k=1}^{2} h_{il} g^{lk}(\mathbf{r'_k} \cdot \mathbf{r'_j}) + \sum\limits_{l=1}^{2} \Gamma_{ij}^{l}(\mathbf{r'_l} \cdot \mathbf{n}) + h_{ij}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \\ \dfrac{\partial(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})}{\partial u^i} = -2 \sum\limits_{l,k=1}^{2} h_{il} g^{lk}(\mathbf{r'_k} \cdot \mathbf{n}) \end{cases} . \tag{4.17.29}$$

După cum cititorul poate să verifice singur, acest sistem este, din nou, complet integrabil, ceea ce înseamnă că are o singură soluţie pentru un set de valori iniţiale prescrise. “Ghicim” că această soluţie este tocmai (4.17.28) şi verificăm acest fapt în cele ce urmează. Pentru ultima ecuaţie nu este nimic de verificat: dacă înlocuim (4.17.28), obţinem $0 = 0$. Pentru a doua ecuaţie, după înlocuire, membrul stâng este zero, în timp ce membrul drept devine:

$$-\sum_{l,k=1}^{2} h_{il} g^{lk} g_{kj} + h_{ij} = -\sum_{l=1}^{2} h_{il} \delta_j^l + h_{ij} = -h_{ij} + h_{ij} = 0,$$

deci am terminat. În fine, ultima ecuaţie devine

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \sum_{l=1}^{2} \Gamma_{ik}^l g_{kj} + \sum_{l=1}^{2} \Gamma_{jk}^l g_{li}$$

ceea ce este uşor de demonstrat, folosind definiţia coeficienţilor lui Christoffel. Astfel, funcţiile (4.17.28) furnizează o soluţie a sistemului (4.17.29), care, în mod evident, satisface condiţiile iniţiale ale teoremei. Cum soluţia este unică, pentru condiţiile iniţiale date avem

$$\begin{cases} \mathbf{r_i'} \cdot \mathbf{r_j'} = g_{ij}, \\ \mathbf{r_i'} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1 \\ (\mathbf{r_1'}, \mathbf{r_2'}, \mathbf{n}) > 0 \end{cases}, \tag{4.17.30}$$

ceea ce demonstrează că am demonstrat deja că

- $\mathbf{r_i'}$ sunt derivatele lui r;
- $\mathbf{n}$ este versorul normalei la suprafaţa parametrizată dată de r;
- g_{ij} sunt coeficienţii primei forme fundamentale a lui r.

Mai avem de demonstrat că h_{ij} sunt coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale a lui r. Să notăm, pentru un moment, cu b_{ij} aceşti coeficienţi. După cum ştim, ei sunt daţi de

$$b_{il} = -\mathbf{n_i'} \cdot \mathbf{r_l'} = \sum_{j,k=1}^{2} h_{ij} g^{jk} \mathbf{r_k'} \cdot \mathbf{r_l'} = \sum_{j,k=1}^{2} h_{ij} g^{jk} g_{kl} = \sum_{j=1}^{2} h_{ij} \delta_l^j = h_{il},$$

ceea ce încheie demonstraţia teoremei lui Bonnet. □

4.18 Teorema egregium a lui Gauss

Teorema pe care o vom demonstra în această secţiune (şi care este implicită în ecuaţiile lui Gauss de mai sus) este una dintre cele mai importante teoreme din geometria diferenţială clasică. Nu întâmplător a numit-o, în faimoasa lui lucrare *Disquisitiones circa superficies curvas* "theorema egregium", adică *teorema remarcabilă*. După cum am văzut în secţiunea precedentă, curbura totală a unei suprafeţe în $\mathbb{R}^3$ se poate exprima în funcţie de determinanţii primelor două forme fundamentale ale suprafeţei. Aceasta ar însemna, în principiu, că curbura totală depinde atât de datele intrinseci (prima formă fundamentală) şi extrinseci (adică a doua formă fundamentală). Se dovedeşte, totuşi, că lucrurile nu stau aşa, adică avem:

Teorema 4.4 (Gauss, 1827)**.** *Curbura totală a unei suprafeţe parametrizate regulare de clasă cel puţin C^3 depinde doar de coeficienţii primei forme fundamentale şi de derivatele lor de ordinul întâi şi doi în raport cu coordonatele.*

Demonstraţie. Există mai multe demonstraţii ale acestei teoreme (care e numită, în multe cărţi, folosind numele latin utilizat de Gauss, adică *theorema egregium*). Demonstraţia iniţială, dată de Gauss în 1827, este destul de complicată. Demonstraţia pe care o vom da aici, aparţinând matematicianului german Richard Baltzer (1867)[6], deşi Struik atribuie formula matematicianului italian Brioschi. Plecăm de la formula

$$K_t = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2},$$

pe care o rescriem sub forma

$$K_t(EG - F^2) = DD'' - D'^2, \tag{4.18.1}$$

sau, folosind expresiile coeficienţilor celei de-a doua forme fundamentale

$$K_t(EG - F^2)^2 = (\mathbf{r}''_{\mathbf{u}^2}, \mathbf{r}'_{\mathbf{u}}, \mathbf{r}'_{\mathbf{v}}) \cdot (\mathbf{r}''_{\mathbf{v}^2}, \mathbf{r}'_{\mathbf{u}}, \mathbf{r}'_{\mathbf{v}}) - (\mathbf{r}''_{\mathbf{uv}}, \mathbf{r}'_{\mathbf{u}}, \mathbf{r}'_{\mathbf{v}})^2. \tag{4.18.2}$$

Membrul drept al ecuaţiei (4.18.2) poate fi scris într-o formă mai convenabilă dacă remarcăm că fiecare termen al său este, de fapt, produsul a doi determinanţi. Utilizăm,

[6]Numele lui Richard Baltzer (1818–1887) nu prea este cunoscut astăzi, totuşi, în a doua jumătate a secolului al nouăsprezeceleaera considerat un geometru important. Pentru historia matematicii este importantă cartea sa "Elementhe der Mathematik", publicată în mai multe ediţii, în care este menţionată, pentru prima dată, geometria neeuclidiană.

acum, următoarea formulă pentru produsul a doi determinanţi, cunoscută din algebra vectorială:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\cdot(\mathbf{d},\mathbf{e},\mathbf{f})=\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{e} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{f}\\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{e} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{f}\\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{e} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{f}\end{vmatrix}. \tag{4.18.3}$$

Folisind formula (4.18.3), formula (4.18.2) devine

$$\begin{aligned}K_t(EG-F^2)^2 &= (\mathbf{r}''_{\mathbf{u}^2}\cdot\mathbf{r}''_{\mathbf{v}^2}-\mathbf{r}''^{\,2}_{\mathbf{uv}})(EG-F^2)+\\ &+\begin{vmatrix}0 & \mathbf{r}''_{\mathbf{u}^2}\cdot\mathbf{r}'_{\mathbf{u}} & \mathbf{r}''_{\mathbf{u}^2}\cdot\mathbf{r}'_{\mathbf{v}}\\ \mathbf{r}'_{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{r}''_{\mathbf{v}^2} & E & F\\ \mathbf{r}'_{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{r}''_{\mathbf{v}^2} & F & G\end{vmatrix}-\\ &-\begin{vmatrix}0 & \mathbf{r}''_{\mathbf{uv}}\cdot\mathbf{r}'_{\mathbf{u}} & \mathbf{r}''_{\mathbf{uv}}\cdot\mathbf{r}'_{\mathbf{v}}\\ \mathbf{r}''_{\mathbf{uv}}\cdot\mathbf{r}'_{\mathbf{u}} & E & F\\ \mathbf{r}''_{\mathbf{uv}}\cdot\mathbf{r}'_{\mathbf{v}} & F & G\end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{4.18.4}$$

Astfel, o parte dintre termenii implicaţi în calculul curburii totale sunt exprimaţi în funcţie de coeficienţii primei forme fundamentale. După cum se vede imediat, restul termenilor sunt de două tipuri: sau un produs al unei derivate de ordinul al doilea a lui **r** cu una de ordinul întâi sau un produs de două derivate de ordinul al doilea. Termenii de primul tip sunt mai uşor de manevrat. Într-adevăr, plecând de la definiţia coeficienţilor primei forme fundamentale, $E=\mathbf{r}'_{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{r}'_{\mathbf{u}}$, $F=\mathbf{r}'_{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{r}'_{\mathbf{v}}$, $G=\mathbf{r}'_{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{r}'_{\mathbf{v}}$ se obţin, derivând în raport cu coordonatele, următoarele expresii:

$$\begin{cases}\mathbf{r}''_{\mathbf{u}^2}\cdot\mathbf{r}'_{\mathbf{u}} = \frac{1}{2}E'_u\\ \mathbf{r}''_{\mathbf{uv}}\cdot\mathbf{r}'_{\mathbf{u}} = \frac{1}{2}E'_v\\ \mathbf{r}''_{\mathbf{v}^2}\cdot\mathbf{r}'_{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}G'_v\\ \mathbf{r}''_{\mathbf{uv}}\cdot\mathbf{r}'_{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}G'_u\\ \mathbf{r}''_{\mathbf{u}^2}\cdot\mathbf{r}'_{\mathbf{v}} = F'_u-\frac{1}{2}E'_v\\ \mathbf{r}''_{\mathbf{v}^2}\cdot\mathbf{r}'_{\mathbf{u}} = F'_v-\frac{1}{2}G'_u\end{cases}. \tag{4.18.5}$$

Derivând, încă o dată, a patra ecuaţie în raport cu u şi a cincea ecuaţie în raport cu v şi scăzând membru cu membru, găsim şi expresia care conţine produsele de derivate de ordinul al doilea ale lui **r**:

$$\mathbf{r}''_{\mathbf{u}^2}\cdot\mathbf{r}''_{\mathbf{v}^2}-\mathbf{r}''^{\,2}_{\mathbf{uv}}=-\frac{1}{2}G''_{u^2}+F''_{uv}-\frac{1}{2}E''_{v^2}. \tag{4.18.6}$$

Combinând tot ce am obţinut, obţinem următoarea expresie pentru curbura totală (datorată, aşa cum am spus, lui Baltzer)

$$\begin{aligned} K_t = \frac{1}{(EG-F^2)^2} & \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}G''_{u^2} + F''_{uv} - \frac{1}{2}E''_{v^2} & \frac{1}{2}E'_u & F'_u - \frac{1}{2}E'_v \\ F'_v - \frac{1}{2}G'_u & E & F \\ \frac{1}{2}G'_v & F & G \end{vmatrix} - \\ - \frac{1}{(EG-F^2)^2} & \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E'_v & \frac{1}{2}G'_u \\ \frac{1}{2}E'_v & E & F \\ \frac{1}{2}G'_u & F & G \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{4.18.7}$$

ceea ce încheie demonstraţia, întrucât am găsit o o expresie a lui K_t care, într-adevăr, depinde numai de coeficienţii primei forme fundamentale şi de derivatele lor până la ordinul al doilea. □

Exerciţiul 4.18.1 (Frobenius). Demonstraţi că curbura totală a unei suprafeţe se poate scrie şi sub următoarea formă, mai uşor de reţinut:

$$\begin{aligned} K_t = & -\frac{1}{4(EG-F^2)^2} \begin{vmatrix} E & E'_u & E'_v \\ F & F'_u & F'_v \\ G & G'_u & G'_v \end{vmatrix} + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{F'_v - G'_u}{\sqrt{EG-F^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{F'_u - E'_v}{\sqrt{EG-F^2}} \right) \right\}. \end{aligned} \tag{4.18.8}$$

În cazul particular al unui sistem de coordonate ortogonale ($F \equiv 0$), obţinem următoarea formulă frumoasă, de tip "divergenţă", pentru curbura totală:

$$K_t = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G'_u}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E'_v}{\sqrt{EG}} \right) \right\}, \tag{4.18.9}$$

care este foarte utilă în anumite formule integrale.

Exerciţiul 4.18.2 (Liouville). Demonstraţi următoarea formulă (uşor asimetrică) pentru curbura totală a unei suprafeţe:

$$K_t = -\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G'_u + \frac{F}{G}G'_v - 2F'_v}{\sqrt{EG-F^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E'_v - \frac{F}{G}G'_u}{\sqrt{EG-F^2}} \right) \right\}. \tag{4.18.10}$$

4.19 Geodezice

4.19.1 Introducere

Curbele pe care le vom studia în această secţiune sunt generalizări directe ale liniilor drepte. Mai precis, ele sunt curbe ale căror proiecţii pe planele tangente ale suprafeţei sunt segmente de dreaptă. Există multe abordări diferite ale geodezicelor. Am ales aici una care ni se pare mai elementară.

4.19.2 Reperul lui Darboux frame. Curbura geodezică şi torsiunea geodezică

Fie $(I, \boldsymbol{\rho})$ o curbă parametrizată al cărei suport este situat pe o suprafaţă S şi fie $M = \boldsymbol{\rho}(t_0)$ un punct de pe curbă, cu $t_0 \in I$. Cum $\boldsymbol{\rho}$ este, în particular, o curbă în spaţiu, putem să-i ataşăm reperul lui Frenet ăn punctul M, $\{M; \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}\}$. Aşa cum am văzut în prima parte a acestei cărţi, acest refer este suficient de bun dacă vrem să investigăm curba $\boldsymbol{\rho}$ ca un obiect *independent*, dar nu este de mare ajutor dacă vrem să studiem legăturile dintre curbă şi suprafaţă. De aceea, vom introduce un alt reper ortonormat, care conţine atât vectori legaţi de curbă, cât şi de suprafaţă. Primul vector al noului reper va fi tot versorul tangentei la curbă, $\boldsymbol{\tau}$. Al doilea, legat de data aceasta de suprafaţă, este versorul normalei la suprafaţă, $\mathbf{n}$. Cel de-al treilea, pe care îl vom nota cu $\mathbf{N}$, va fi ales astfel încât baza $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{N}, \mathbf{n}\}$ să fie directă sau, cu alte cuvinte, astfel încât $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{N}, \mathbf{n}) = 1$. Aceasta înseamnă, desigur, că

$$\mathbf{N} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}.$$

Desigur, $\mathbf{N}$ este situat în planul normal la curbă în M, de aceea îl vom numi *versorul normalei tangenţiale* a curbei. Numele provine, fireşte, de la faptul că $\mathbf{N}$ este situat, de asemenea, în planul tangent la suprafaţă în M.

Reperul $\{M; \boldsymbol{\tau}, \mathbf{N}, \mathbf{n}\}$ se numeşte *reperul Darboux* sau reperul *Ribaucour-Darboux* al suprafeţei S de-a lungul curbei $\boldsymbol{\rho}$.

Următorul pas pe care îl vom face va fi acela de a calcula derivatele vectorilor reperului lui Darboux şi de a obţine un set de ecuaţii diferenţiale ordinare liniare analoage cu ecuaţiile lui Frenet şi care va juca un rol important în secţiunile care urmează. Pentru a le obţine, intenţia este tocmai să folosim ecuaţiile lui Frenet. De aceea, vom începe prin a exprima vectorii $\mathbf{N}$ şi $\mathbf{n}$ în funcţie de vectorii reperului lui Frenet. Notăm cu θ unghiul dintre vectorii $\boldsymbol{\nu}$ şi $\mathbf{n}$. Atunci, după cum se observă imediat,

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nu} = \cos(\mathbf{N}, \boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{N} + \sin(\mathbf{N}, \boldsymbol{\nu})\mathbf{n} \\ \boldsymbol{\beta} = \cos(\mathbf{N}, \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{N} + \sin(\mathbf{N}, \boldsymbol{\beta})\mathbf{n} \end{cases}.$$

Cum $(\mathbf{N}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{\pi}{2}$ şi $(\mathbf{N}, \boldsymbol{\beta}) = \pi - \theta$, obţinem

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nu} = \sin\theta \mathbf{N} + \cos\theta \mathbf{n} \\ \boldsymbol{\beta} = -\cos\theta \mathbf{N} + \sin\theta \mathbf{n} \end{cases}.$$

Invers, obţinem

$$\begin{cases} \mathbf{N} = \sin\theta \cdot \boldsymbol{\nu} - \cos\theta \cdot \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{n} = \cos\theta \cdot \boldsymbol{\nu} + \sin\theta \cdot \boldsymbol{\beta} \end{cases}.$$

Acum, derivatele vectorilor reperului lui Darboux în funcţie de lungimea arcului se pot exprima în funcţie de aceşti vectori ca

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}' = a(s) \cdot \mathbf{N} + b(s)\mathbf{n} \\ \mathbf{N}' = c(s)\boldsymbol{\tau} + d(s) \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = e(s) \cdot \boldsymbol{\tau} + f(s) \cdot \mathbf{N}, \end{cases} \tag{4.19.1}$$

unde a, b, c, d, e, f sunt funcţii netede de lungimea arcului. Reamintim că derivata unui vector al reperului lui Darboux este perpendiculară pe acel vector, deoarece reperul este ortonormat. Din acelaşi motiv, rezultă imediat că cei şase coeficienţi nu sunt independenţi şi, în fapt, avem relaţiile $c = -a, e = -b, f = -d$, de aceea sistemul (4.19.1) devine

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}' = a(s) \cdot \mathbf{N} + b(s)\mathbf{n} \\ \mathbf{N}' = -a(s)\boldsymbol{\tau} + d(s) \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = -b(s) \cdot \boldsymbol{\tau} - d(s) \cdot \mathbf{N}, \end{cases} \tag{4.19.2}$$

Vom exprima acum cantităţile a, b, d în funcţie de caracteristicile curbei şi de unghiul θ. Remarcăm, înainte de toate, că din prima ecuaţie a lui Frenet rezultă că

$$\boldsymbol{\tau}' = k\boldsymbol{\nu} = k(\sin\theta \cdot \mathbf{N} + \cos\theta \cdot \mathbf{n}),$$

prin urmare, identificând coeficienţii cu cei ai primei ecuaţii din sistemul (4.19.2), obţinem

$$a = k \cdot \sin\theta; \quad b = k \cdot \cos\theta. \tag{4.19.3}$$

Mărimea $k \cdot \cos\theta$ ne este deja cunoscută: nu este altceva decât *curbura normală* k_n a suprafeţei, studiată mai devreme. Funcţia $k \cdot \sin\theta$, în schimb, este nouă. O vom nota cu k_g şi o vom numi curbură *geodezică* sau *tangenţială* a curbei[7]. Pentru a determina mărimea d, plecăm de la relaţia

$$\mathbf{N} = \sin\theta \cdot \boldsymbol{\nu} - \cos\theta \cdot \boldsymbol{\beta}.$$

Derivând în raport cu lungimea arcului de curbă, obţinem, folosind ultimele două formule ale lui Frenet:

$$\begin{aligned}\mathbf{N}' &= \theta' \cdot \sin\theta \cdot \boldsymbol{\nu} - \sin\theta(-k \cdot \boldsymbol{\tau} + \chi \cdot \boldsymbol{\beta}) + \theta' \sin\theta \cdot \boldsymbol{\beta} + \chi \cdot \cos\theta \cdot \boldsymbol{\nu} = \\ &= -k \cdot \sin\theta \cdot \boldsymbol{\tau} + (\theta' + \chi) \cdot (\cos\theta \cdot \boldsymbol{\nu} + \sin\theta \cdot \boldsymbol{\beta}) = \\ &= -k \cdot \sin\theta \cdot \boldsymbol{\tau} + (\theta' + \chi) \cdot \mathbf{n},\end{aligned}$$

şi, comparând cu a doua ecuaţie din (4.19.2), obţinem

$$d = \theta' + \chi.$$

Această funcţie se notează cu χ_g şi se numeşte *torsiune geodezică*. Semnificaţia ei geodezică va fi lămurită mai târziu. În mod clar, nu putem afirma, aşa cum am făcut cu curbura geodezică, că torsiunea geodezică este torsiunea proiecţiei curbei pe planul tangent, deoarece torsiunea acelei curbe este tot timpul zero, în timp ce torsiunea geodezică a unei curbe de pe suprafaţă este, în general, nenulă.

Curbura geodezică joacă un rol mult mai important în geometria suprafeţelor decât torsiunea geodezică, aşa că ne vom ocupa de ea mai întâi. Remarcăm, înainte de toate, că

$$k_g = \boldsymbol{\tau}' \cdot \mathbf{N} = -\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{N}'. \tag{4.19.4}$$

Deoarece, aşa cum am văzut mai devreme, $\mathbf{N} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}$, se obţine pentru k_g expresia

$$k_g = \boldsymbol{\tau}' \cdot \mathbf{N} = \boldsymbol{\tau}' \cdot (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}),$$

adică

$$k_g = (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}', \boldsymbol{n}). \tag{4.19.5}$$

Această formulă este adevărată pentru curbe parametrizate natural. Să considerăm, acum, o curbă parametrizată regulară oarecare pe suprafaţa S, dată prin ecuaţiile

[7] Aici termenul "tangenţială" se referă la planul tangent la suprafaţă, nu la tangenta la curbă. De fapt, se poate arăta că curbura geodezică într-un punct al unei curbe situate pe o suprafaţă este curbura cu semn a proiecţiei curbei pe planul tangent la suprafaţă în acel punct particular.

locale $u = u(t), v = v(t)$. Avem, prin urmare, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t))$. Dacă notăm cu un punct derivarea în raport cu parametrul t de-a lungul curbei, obţinem

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\dot{s}} \cdot \dot{\mathbf{r}},$$

de aceea

$$\boldsymbol{\tau}' = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{\dot{s}^3}(\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{s} - \dot{\mathbf{r}}\ddot{s}).$$

Astfel, pentru curbura geodezică obţinem

$$k_g = (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}', \mathbf{n}) = \left(\frac{1}{\dot{s}}\dot{\mathbf{r}}, \frac{1}{\dot{s}^3}(\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{s} - \dot{\mathbf{r}}\ddot{s}), \mathbf{n}\right) = \frac{1}{\dot{s}^4}(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{s} - \dot{\mathbf{r}}\ddot{s}, \mathbf{n}) = \frac{1}{\dot{s}^4}(\dot{\mathbf{r}}, \dot{s} \cdot \ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{n}),$$

adică

$$k_g = \frac{1}{\dot{s}^3}(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{n}). \tag{4.19.6}$$

Formulele pe care le-am obţinut până acum pentru curbura geodezică folosesc un amestec de informaţii despre curbă şi suprafaţă, dar ele nu folosesc în mod explicit obiectele pe care le calculă, de obicei, atunci când ni se dă o parametrizare locală a unei suprafeţe sau, mai general, o suprafaţă parametrizată regulară, anume coeficienţii primelor două forme fundamentale. Prin urmare, următorul pas va fi să obţinem o formulă pentru curbura geodezică în funcţie de coeficienţii formelor fundamentale, atunci când curba este dată prin ecuaţiile sale locale în raport cu o parametrizare locală a suprafeţei. Vom descoperi, de fapt, că curbura geodezică poate fi exprimată în funcţie de coeficienţii primei forme fundamentale şi de derivatele lor paţiale de ordinul întâi în raport cu coordonatele.

Pentru a simplifica notaţiile, vom folosi, o vreme, notaţiile cu indici. Cu alte cuvinte, vom nota coordonatele cu u^1 şi u^2, în loc de u şi v, în timp ce derivarele parţiale de ordinul întâi ale razei vectoare $\mathbf{r}$ în raport cu coordonatele vor fi notate cu $\mathbf{r}'_i$, iar cele de ordinul al doilea cu $\mathbf{r}''_{ij}$, $i, j = 1, 2$. În plus, vom folosi *convenţia de însumare a lui Einstein*: de fiecare dată când un indice se repetă într-un monom, o dată în poziţia inferioară şi o dată în poziţia superioară, se însumează după toate valorile admise ale acelui indice (în cazul nostru 1 şi 2). Astfel, o expresie de forma $a_i u^i$ trebuie citită

$$a_i u^i = a_1 u^1 + a_2 u^2.$$

Întorcându-ne la problema noastră, avem, cu notaţiile nou introduse:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} & \equiv \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'_i \dot{u}^i \\ \ddot{\mathbf{r}} & = \mathbf{r}''_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j + \mathbf{r}'_k\ddot{u}^k \end{cases}.$$

Descompunerea derivatelor de ordinul al doilea ale razei vectoare în raport cu baza $\{\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{n}\}$ ne este deja cunoscută: ea poate fi descrisă folosind folosind coeficienţii lui Christoffel şi cea de-a doua formă fundamentală ca

$$\mathbf{r}''_{ij} = \Gamma^k_{ij}\mathbf{r}'_k + h_{ij}\cdot\mathbf{n},$$

unde, după cum ştim, h_{ij} sunt coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale a suprafeţei. stfel, avem

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\Gamma^k_{ij}\mathbf{r}'_k + h_{ij}\cdot\mathbf{n}\right)\dot{u}^i\dot{u}^j + \mathbf{r}'_k\ddot{u}^k = \left(\ddot{u}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\right)\mathbf{r}'_k + h_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\mathbf{n}$$

sau

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\ddot{u}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\right)\mathbf{r}'_k + \varphi_2(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})\cdot\mathbf{n}.$$

Aşadar, putem scrie

$$\begin{aligned} k_g =& \frac{1}{\dot{s}^3}(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{n}) = \frac{1}{\dot{s}^3}\left(\dot{u}^m\mathbf{r}'_m, \left(\ddot{u}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\right)\mathbf{r}'_k + \varphi_2(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}), \mathbf{n}\right) = \\ =& \frac{1}{\dot{s}^3}\left[\dot{u}^1\left(\ddot{u}^2 + \Gamma^2_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\right) - \dot{u}^2\left(\ddot{u}^1 + \Gamma^1_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\right)\right]\left(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{n}\right). \end{aligned}$$

Dar

$$\left(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{n}\right) = \left(\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}'_2\right)\cdot\mathbf{n} = \left(\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}'_2\right)\cdot\frac{\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}'_2}{\|\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}'_2\|} = \|\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}'_2\| = \sqrt{g},$$

unde g este determinantul primei forme fundamentale, de unde

$$k_g = \frac{\sqrt{g}}{\dot{s}^3}\left[\dot{u}^1\left(\ddot{u}^2 + \Gamma^2_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\right) - \dot{u}^2\left(\ddot{u}^1 + \Gamma^1_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\right)\right]. \tag{4.19.7}$$

Dacă, în particular, curba este parametrizată natural, obţinem

$$k_g = \sqrt{g}\left[(u^1)'\left((u^2)'' + \Gamma^2_{ij}(u^i)'(u^j)'\right) - (u^2)'\left((u^1)' + \Gamma^1_{ij}(u^i)'(u^j)'\right)\right]. \tag{4.19.8}$$

Cu notaţiile tradiţionale, formula pentru curbura geodezică a unei curbe parametrizate natural este

$$\begin{aligned} k_g = \sqrt{EG-F^2}\Big[&\Gamma_{11}^2 u'^3 + \left(2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1\right) u'^2 v' + \left(\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1\right) u' v'^2 - \\ &-\Gamma_{22}^1 v'^3 + u'v'' - u''v'\Big]. \end{aligned} \tag{4.19.9}$$

Această ecuaţie poate fi scrisă mai elegant sub forma

$$k_g = \sqrt{EG-F^2}\det\begin{pmatrix} u' & u'' + u'^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + v'^2\Gamma_{22}^1 \\ v' & v'' + u'^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + v'^2\Gamma_{22}^2 \end{pmatrix}. \tag{4.19.10}$$

Dacă, în particular, suprafaţa S este planul, cu coordonatele carteziene, atunci determinantul primei forme fundamentale este, desigur, egal cu unu, din moment ce matricea primei forme fundamentale este matricea identică, în timp ce toţi coeficienţii lui Christoffel se anulează. Drept consecinţă, în această situaţie curbura geodezică a unei curbe (care e o curbă plană, în acest caz), nu este altceva decât *curbura cu semn*:

$$k_g = u'v'' - u''v' \equiv k_{\pm}.$$

Observaţie. Se poate arăta că, de fapt, curbura geodezică a unei curbe pe o suprafaţă nu e altceva decât curbura cu semn a proiecţiei curbei pe planul tangent.

4.19.3 Linii geodezice

Definiţia 4.19.1. Fie S o suprafaţă. O curbă parametrizată $\boldsymbol{\rho} : I \to S$ se numeşte *linie geodezică* sau, pur şi simplu, *geodezică* dacă, în fiecare punct, curbura sa geodezică se anulează.

Observaţie. În conformitate cu formula (4.19.12), curbura geodezică a unei curbe se poate scrie

$$k_g = (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}', \boldsymbol{n}).$$

Pe de altă parte, din prima formulă a lui Frenet, $\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\tau}' = k\boldsymbol{\beta}$, de aceea k_g se anulează într-un punct al unei curbe pe suprafaţă dacă şi numai dacă binormala la curbă este perpendiculară pe planul normal la suprafaţă în acel punct sau, cu alte cuvinte, *curbura geodezică se anulează dacă şi nunai dacă normala la suprafaţă este conţinută în* *planul osculator al curbei*. Astfel, geodezicele sunt acele linii de pe suprafaţă pentru care planul osculator în fiecare punct conţine normala la suprafaţă în punctul respectiv. De fapt, în multe cărţi, această proprietate este luată ca definiţie a geodezicelor.

O altă remarcă ce trebuie făcută este că, întrucât, aşa cum am remarcat mai devreme, curbura geodezică este curbura cu semn a proiecţiei curbei pe planul tangent la suprafaţă, putem spune că geodezicele sunt acele curbe care se proiectează pe fiecare plan tangent după o linie dreaptă. În acest sens, putem spune că geodezicele sunt liniile cele mai *drepte* de pe suprafaţă.

Formula 4.19.9 ne conduce la

Teorema 4.5. *Ecuaţia diferenţială a liniilor geodezice este*

$$\Gamma_{11}^2 u'^3 + \left(2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1\right) u'^2 v' + \left(\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1\right) u' v'^2 - \Gamma_{22}^1 v'^3 + u'v'' - u''v' = 0. \tag{4.19.11}$$

De asemenea, din (4.19.10) putem deduce că

Teorema 4.6. *Liniile geodezice verifică sistemul de ecuaţii diferenţiale*

$$\begin{cases} u'' + u'^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + v'^2\Gamma_{22}^1 = 0 \\ v'' + u'^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + v'^2\Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases}. \tag{4.19.12}$$

Există, în aparenţă, o contradicţie între cele două teoreme precedente, deoarece prima afirmă că geodezicele sunt soluţiile unei singure ecuaţii diferenţiale, iar cea de-a doua – că ele sunt soluţiile unuyi sistem de două ecuaţii diferite. Totuşi, în realitate cele două ecuaţii ale sistemului (4.19.12) nu sunt independente, deoarece noi impunem ca geodezicele să fie *parametrizate natural*, de aceea între funcţiile u şi v există o relaţie suplimentară.

Existenţa (cel puţin local) a unei geodezice care trece printr-un punct dat al suprafeţei şi care are, în acel punct, un vector tangent dat este o consecinţă a unor rezultate standard din teoria ecuaţiilor diferenţiale ordinare. Determinarea geodezicelor este, de regulă, o problemă foarte delicate şi doar în anumite situaţii speciale ele pot fi determinate explicit.

Exemple de geodezice

Geodezicele planului. Din interpretarea geometrică a geodezicelor, ca fiind curbele care se proiectează pe planele tangente după linii drepte, deducem imediat că geodezicele planului sunt liniile drepte şi numai ele. Pe de altă parte, utilizând coordonatele carteziene, vedem imediat că toţi coeficienţii Christoffel sunt identic nuli, de aceea ecuaţiile geodezicelor se reduc la

$$\begin{cases} u'' = 0 \\ v'' = 0 \end{cases},$$

ceea ce conduce la $u(s) = a_1 s + b_1$, $v(s) = a_2 s + b_2$, adică, din nou, geodezicele planului sunt liniile drepte.

Geodezicele sferei. Geodezicele sferei pot fi găsite foarte uşor din interpretarea lor ca fiind acele curbe pentru care planul osculator conţine normala la suprafaţă. După cum ştim, în cazul sferei toate normalele trec prin centrul sferei, de aceea planele osculatoare trebuie să treacă, toate, prin centru, ceea ce ne conduce imediat la concluzia că toate geodezicele sunt arce de cerc mare de pe sferă.

Pe de altă parte, utilizând o parametrizare standard a sferei (cu coordonate sferice), putem găsi ecusţiile geodezicelor sub formas:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = 0 \\ \ddot{\varphi} + 2\cot\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} = 0 \end{cases}.$$

Presupunem că ecuaţia explicită a geodezicelor este de forma $\theta = \theta(\varphi)$. Atunci

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{d\varphi}\cdot\dot{\varphi},$$

$$\ddot{\theta} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)\cdot\dot{\varphi} + \frac{d\theta}{d\varphi}\ddot{\varphi} = \frac{d\theta}{d\varphi}\cdot\ddot{\varphi} + \frac{d^2\theta}{d\varphi^2}\cdot\dot{\varphi}^2.$$

De aceea, prima ecuaţie a sistemului devineT:

$$\ddot{\varphi}\cdot\frac{d\theta}{d\varphi} + \frac{d^2\theta}{d\varphi^2}\cdot\dot{\varphi}^2 - \sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\varphi}^2 = 0.$$

Pe de altă parte, din prima ecuaţie,

$$\ddot{\varphi} = -2\cot\theta\dot{\theta}\cdot\dot{\varphi} = -2\cot\theta\frac{d\theta}{d\varphi}\cdot\dot{\varphi}^2,$$

deci:

$$\dot{\varphi}^2\left(\frac{d^2\theta}{d\varphi^2} - 2\cot\theta\cdot\frac{d\theta}{d\varphi} - \sin\theta\cos\theta\right) = 0.$$

Avem două posibilităţi: fie $\dot{\varphi} = 0$, adică $\varphi = const$, şi, în acest caz, curba este, în mod evident, un cerc mare al sferei (un meridian), fie

$$\frac{d^2\theta}{d\varphi^2} - 2\cot\theta \cdot \frac{d\theta}{d\varphi} - \sin\theta\cos\theta = 0.$$

În acest caz, facem substituţia $z = \cot\theta$ şi, după un calcul imediat, obvţinem

$$\frac{d^2 z}{d\varphi^2} + z = 0,$$

iar această ecuaţie are soluţia generală

$$z = \cot\theta = A\cos\varphi + B\sin\varphi$$

sau

$$A\sin\theta\cos\varphi + B\sin\theta\sin\varphi - \cos\theta = 0,$$

care este ecuaţia unui cerc mare, situat într-un plan care trece prin origine şi are vectorul normal $(A, B, -1)$.

4.19.4 Suprafeţe Liouville

Definiţia 4.19.2. O suprafaţă se numeşte *suprafaţă Liouville surface* dacă ea se poarte parametriza în aşa fel încât prima sa formă fundamentală să poată fi scrisă ca

$$ds^2 = (U(u) + V(v))(du^2 + dv^2), \tag{4.19.13}$$

unde U şi V sunt funcţii netede de o singură variabilă.

Aceste suprafeţe au fost introduse de către matematicianul francez Joseph Liouville într-o notă la ediţia a 5-a a cărţii lui Gaspard Monge de aplicaţii ale analizei în geometrie (1852). În particular, suprafeţele de revoluţie sunt exemple de suprafeţe Liouville. Cea mai importantă caracteristică a suprafeţelor Liouville constă în faptul că geodezicele lor pot fi determinate prin cuadraturi. Vom demonstra acest lucru în restul acestei secţiuni.

Înainte de toate, este uşor de demonstrat că ecuaţia geodezicelor pentru metrica (4.19.13) se poate scrie ca

$$(U'v' - V'u')(u'^2 + v'^2) + 2(U + V)(u'v'' - v'u'') = 0. \tag{4.19.14}$$

Aici, pentru funcţiile U şi V cu prim se notează derivatele în raport cu u, respectiv v, în timp ce pentru funcţiile de coordonate u şi v cu prim se notează derivatele lor în raport cu parametrul t de-a lungul geodezicei. Desigur, U şi V sunt, ambele, funcţii de t, prin intermediul funcţiilor de coordonate. De aceea, ecuaţia geodezicelor se poate rescrie ca

$$\frac{u'}{v'}\frac{dU}{dt}-\frac{v'}{u'}\frac{dV}{dt}+2(U+V)\frac{u'v''-v'u''}{u'^2+v'^2}=0. \tag{4.19.15}$$

Observăm că în această ecuaţie nu apar, de fapt, funcţiile de coordonate u şi v, ci doar derivatele lor. Le înlocuim cu alte două funcţii de t, ρ şi α, definite prin

$$\begin{cases} u' = \rho\cos\alpha \\ v' = \rho\sin\alpha \end{cases}. \tag{4.19.16}$$

Ca urmare, ecuaţia geodezicelor devine

$$\sin^2\alpha\frac{dU}{dt}-\cos^2\alpha\frac{dV}{dt}+2(U+V)\sin\alpha\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}=0.$$

Această ecuaţie se mai poate scrie

$$\frac{d}{dt}\left(U\sin^2\alpha-V\cos^2\alpha\right)=0,$$

de unde

$$U\sin^2\alpha-V\cos^2\alpha=a,$$

unde a este o constantă. Întorcându-ne vechile funcţii de coordonate, obţinem

$$v'^2U-u'^2V=a(u'^2+v'^2),$$

de unde

$$\int\frac{du}{\sqrt{U-a}}=\pm\int\frac{dv}{\sqrt{V+a}}+b, \tag{4.19.17}$$

unde b este o altă constantă de integrare.

Bibliografie

[1] Bär, C. – *Elementary Differential Geometry*, Cambridge University Press, 2010

[2] Barbosa, J.L.M., Colares, A.G. – *Minimal Surfaces in* $\mathbb{R}^3$, Springer Verlag, Berlin, 1986 (Lecture Notes in Mathematics, 1195)

[3] Beltrami, E. – *Ricerche di analisi applicata alla geometria*, Giorn. di Mat., **2-3**, 1864–1865

[4] Bianchi, L. – *Lezioni di geometria differenziale*, Spoerri, Pisa, 1894

[5] Blaschke, W. – *Vorlesungen über Differentialgeometrie. I. Elementare Differentialgeometrie*, Springer Verlag, Berlin, 1921

[6] Burali-Forti, C. – *Fondamenti per la geometria differenziale di una superficie col metodo vettoriale generale*, Rend. Palermo, **33**(1912)

[7] do Carmo, M.P. – *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, 1976

[8] Catalan, E. – Journal de Mathém., **7** (1842), p.203

[9] Codazzi, D. – *Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio*, Ann. di Mat. (2), **1**, 1867–1868; **2**, 1868–1869; **4**, 1870–1871.

[10] Darboux, G. – *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Volumes I to IV, Gauthier-Villars, Paris, 1887-1896

[11] Dupin, Ch. – *Développement de géométrie*, Paris, 1813

[12] Dupin, Ch. – *Applications de géométrie et de mécanique*, Paris, 1822

[13] Enneper, A. – Zeitschrift für Mathem. und Physik, **9** (1864), p.108

[14] Euler, L. – *Introduction in analysin infinitorum*, I–II, Lausannae, 1748

[15] Euler, L. – *De projectione geographica superficiei sphaerici*, Acta Ac. Petrop., I, 1777

[16] Eisenhart, L.P. – *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Ginn & Co., Boston, 1909

[17] Eisenhart, L.P. – *An Introduction to Differential Geometry*, Princeton University Press, 1947

[18] Favard, J. – *Cours de géométrie differentielle locale*, Gauthier-Villars, Paris, 1957

[19] Fedenko, A.S. (ed.) – *Differencial'naja geometrija*, Minsk, 1982

[20] Finikov, S.P. – *Kurs differencial'noi geometrii*, Moscow, 1952

[21] Forsyth, A.R. – *Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Cambridge University Press, 1912

[22] Frenet, F. – *Sur les courbes à double courbure*, Journ. de Math. **1**, 1852

[23] Gauss, C.F. – *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Comm. Soc. Göttingen, Bd. 6, 1823-1827

[24] Gray, A. – *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, CRC Press, 1993

[25] Hilbert, D., Cohn-Vossen, S. – *Geometry and the Imagination*, Chelsea, New York, 1952

[26] Hopf, H. – *Selected Topics in the Differential Geometry in the Large*, Notes by T. Klotz, New York, Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1955

[27] Hopf, H. – *Lectures on Differential Geometry in the Large*, Notes by J. W. Gray, Standford, Applied Mathematics and Statistics Laboratory, Standford University, 1955

[28] Hsiung, C.C. – *A First Course in Differential Geometry*, John Wiley, 1981

[29] Jellet, J.H. – *On the properties of inextensible surfaces*, Trans. Irish Ac. Dublin, **22** [1855], 1856

[30] Joachimstahl, F. – *Demonstrationes theorematum ad superficies curvas spectantum*, Journ. reine angew. Math. **30**, 1846

[31] Klingenberg, W. – *A Course in Differential Geometry*, Springer (Graduate Texts in Mathematics, 51), 1983

[32] Kreyszig, E. – *Differential Geometry*, University of Toronto Press, Toronto, 1959

[33] Lagrange, J.L. – *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies*, Miscellanea Taurinesnea, II, 1760–1761

[34] Lagrange, J.L. – *Sur la construction des cartes géographiques*, Nouv. Mém. Ac. Berlin, 1779

[35] Lamé, G. – *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, Paris, 1859

[36] Lelong-Ferrand, J., Arnaudiès, J.M. – *Cours de mathématiques*, Tome 3: *Géométrie et cinématique*, 2^e^ édition, Dunod, Paris, 1977

[37] Meusnier, J.B. – *Mémoire sur la courbure des surfaces*, Mémoires des savants étrangers, **10** (lu 1776), 1785, 477–510

[38] Mainardi, G. – *Sulla teoria generale delle superficie*, Giorn. Ist. Lombardo, **9**, 1856

[39] Minding, F. – *Ueber die Biegung krummer Flächen*, Journ. reine angew. Math., **18**, 1838

[40] Minding, F. – *Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; näbst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmasse*, Journ. reine angew. Math., **19**, 1839

[41] Monge, G. – *Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux derivées partielles*, Mém. Ac. sci., 1787

[42] Monge, G. – *Applications de l'analyse à la géométrie*, Paris, 1807

[43] Nitsche, J.C.C. – *Vorlesungen über Minimalflächen*, Springer, 1975

[44] O'Neill, B. – *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, New York, 1966

[45] Osserman, R. – *A Survey of Minimal Surfaces*, second edition, Dover, 1986

[46] Pogorelov, A.V. – *Differential Geometry*, Noordhoff, Groningen, 1966

[47] Raševskii, P.K. – *Kurs differencial'noi geometrii*, 4^{th} edition, Moscow, 1956

[48] Riemann, B. – *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Gött. Abh., **13**, 1868

[49] Rodrigues, O. – *Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces*, Corrésp. École polyt., textbf3, 1815

[50] Germain, S. – *Mémoire sur la courbure des surfaces*, Journ. reine angew. Math., **7**, 1830

[51] Scheffers, G. – *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. I. Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume; II. Einführung in die Theorie der Flächen*, Teubner, Berlin-Leipzig, 1900, 1902

[52] Scherk, P. – Crelle's Journal f. Mathem., **13** (1835)

[53] Serret, A. – *Mémoire sur quelques formules relatives á la théorie des courbes à double courbure*, Journ. de Math., **16**, 1851

[54] Steiner, J. – *Ueber parallele Flächen*, Mon. Ber. Ak. Wiss., Berlin, 1840, pp. 114–118

[55] Stoker, J.J. – *Differential Geometry*, John Wiley and Sons, 1969

[56] Struik, D.J. – *Lectures on Classical Differential Geometry*, second edition, Dover, 1988

[57] Thorpe, J.A. – *Elementary Topics in Differential Geometry*, Springer (Undergraduate Texts in Mathematics), 1979

[58] Vygodskii, M. Ya. – *Differential'naja geometriya*, Moscow-Leningrad, 1949

[59] Willmore, T. – *An Introduction to Differential Geometry*, Clarendon Press, Oxford, 1959